

soddisfatta solo per $\alpha = 2$, ossia per il potenziale armonico, con $\Delta\vartheta = \pi$. Per $-2 < \alpha < 0$ si ha invece la condizione

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2+\alpha}} = \frac{2\pi}{2+\alpha}$$

soddisfatta solo per $\alpha = -1$, ossia per il potenziale Kepleriano, con $\Delta\vartheta = 2\pi$. Restano quindi i soli candidati $V(r) = kr^2/2$ e $V(r) = -k/r$, per i quali occorrerebbe verificare che l'orbita è effettivamente chiusa per tutti i valori di L e C che danno orbite limitate. Questo calcolo è già stato svolto nel paragrafo 2.4.1 per il potenziale armonico e nel paragrafo 2.4.3 per il caso Kepleriano, dove si è visto che le orbite sono in ambedue i casi ellittiche, e dunque chiuse. Q.E.D.

2.6 Il problema a molti corpi

Il problema dei due corpi, e la conseguente riduzione al problema del moto centrale, hanno fin qui consentito di verificare la corrispondenza tra le previsioni della dinamica Newtoniana e le leggi fenomenologiche di Keplero. È ora tempo di effettuare un ulteriore allargamento, passando senz'altro a discutere il problema di n punti materiali interagenti.

2.6.1 Equazioni e leggi di conservazione

Nello scrivere le equazioni di moto di un sistema di n punti si dovrà tener conto della interazione reciproca di tutti i punti. A tal fine si farà uso del *principio di sovrapposizione delle forze*, ammettendo, con Newton, che la forza totale esercitata su un punto qualsiasi da tutti gli altri punti del sistema sia la somma vettoriale delle singole forze dovute a ciascuno degli altri punti.

Come forza agente si dovrà considerare la forza gravitazionale; tuttavia, i primi risultati possono dedursi per campi di forze più generali. Più precisamente, facendo riferimento ad un sistema di coordinate cartesiane solidali con le stelle fisse, e denotando con \mathbf{x}_j , ($1 \leq j \leq n$) le coordinate dei punti, con \mathbf{F}_{jk} la forza che il punto \mathbf{x}_k esercita sul punto \mathbf{x}_j , e con $|\cdot|$ la distanza euclidea in \mathbf{R}^3 si supponrà che valgano le seguenti ipotesi^[7] (*forze di tipo classico*):

i. *principio di azione e reazione:*

$$(2.54) \quad \mathbf{F}_{jk} + \mathbf{F}_{kj} = 0 ;$$

ii. *principio delle forze centrali:*

$$(2.55) \quad (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \wedge \mathbf{F}_{jk} = 0 ;$$

[7] La discussione qui riportata è volutamente sommaria, non essendo scopo di queste note spiegare i fondamenti della meccanica. In particolare, si considera il sistema di punti come isolato nello spazio, e quindi non soggetto a forze esterne. Per un'esposizione più completa e generale si rimanda ai testi di Meccanica Razionale.

Si effettua poi la sostituzione $y = w/w_{\max}$, e si ottiene

$$(2.53) \quad \Delta\vartheta = 2 \int_{y_{\min}}^1 \frac{dy}{\sqrt{\frac{2C}{w_{\max}^2} - y^2 - \frac{2\mu}{L^2 w_{\max}^2} V\left(\frac{1}{yw_{\max}}\right)}} .$$

Nel caso $\alpha > 0$ del potenziale logaritmico si deve ricordare che è

$$C = \frac{1}{2} w_{\max}^2 + \frac{\mu}{L^2} V\left(\frac{1}{w_{\max}}\right) ;$$

si osserva poi che per $C \rightarrow \infty$ si ha $w_{\max} \rightarrow \infty$ e $w_{\min} \rightarrow 0$; il termine che contiene V quindi si annulla, e l'integrale tende a

$$\Delta\vartheta = 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pi ,$$

e da qui segue la (2.50). Nel caso $-2 < \alpha < 0$ si sostituisce nella (2.52) l'espressione esplicita $V(r) = -kr^\alpha$; per $C \rightarrow 0^-$ si ha allora $w_{\min} \rightarrow 0$, mentre w_{\max} si deve calcolare annullando il radicando della (2.52) per $C = 0$, e si ottiene

$$w_{\max}^{2+\alpha} = \frac{2k\mu}{L^2} .$$

Sostituendo nella (2.53) si ricava allora^[7]

$$\Delta\vartheta = 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^{-\alpha} - y^2}} = \frac{2\pi}{2+\alpha} ,$$

ossia la (2.51).

Q.E.D.

A conclusione di questa discussione si perviene alla formulazione del teorema di Bertrand

Proposizione 2.8: *I soli campi di forze centrali per cui tutte le orbite limitate siano chiuse sono quelli con potenziale armonico, $V = kr^2/2$ e Kepleriano, $V = -k/r$.*

Dimostrazione. In generale $\Delta\vartheta$, calcolato mediante la (2.25), dipende in modo continuo dalle costanti C e L , determinate a loro volta mediante i dati iniziali. Perchè tutte le orbite limitate siano chiuse occorre che l'angolo $\Delta\vartheta$ tra due perielii consecutivi sia in rapporto razionale con 2π ; per continuità, questo implica che $\Delta\vartheta$ deve essere indipendente sia da L che da C . Per il lemma 2.6, l'indipendenza da L seleziona i soli potenziali della forma (2.48). Se ora si fissa L , l'indipendenza da C richiede almeno che $\Delta\vartheta_{\text{circ}}$ coincida con il limite di $\Delta\vartheta$ quando $w_{\max} \rightarrow +\infty$. Confrontando i risultati del lemma 2.7 con quelli del lemma 2.6 si hanno due casi. Scegliendo nella (2.48) $\alpha > 0$, oppure il potenziale logaritmico (corrispondente a $\alpha = 0$) si ha la condizione

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2+\alpha}} = \pi$$

[7] Per il calcolo dell'integrale si effettua la sostituzione $y^{(2+\alpha)/2} = \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

dove k è una costante positiva; inoltre in questi casi si ha

$$(2.49) \quad \Delta\vartheta_{\text{circ}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2+\alpha}},$$

dove il valore $\alpha = 0$ corrisponde al potenziale logaritmico.

Dimostrazione. Dal lemma 2.5, imponendo che $\Delta\vartheta_{\text{circ}}$ sia indipendente da \bar{w} , si ottiene che $\mathcal{V}(w)$ deve soddisfare l'equazione differenziale

$$\frac{\mathcal{V}' - w\mathcal{V}''}{\mathcal{V}'} = \gamma > 0,$$

dove γ è una costante, e l'ulteriore condizione $\mathcal{V}' < 0$, necessaria perchè esista la soluzione dell'equazione (2.47) per l'equilibrio (si ricordi che $w > 0$). Integrando una prima volta si ottiene $\mathcal{V}'(w) = \beta w^{1-\gamma}$, con una costante arbitraria di integrazione β ; integrando una seconda volta, e ignorando la costante di integrazione (irrilevante per il movimento), si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(w) &= \frac{\beta}{2-\gamma} w^{2-\gamma} && \text{per } \gamma \neq 2, \\ \mathcal{V}(w) &= \beta \ln w && \text{per } \gamma = 2, \end{aligned}$$

e si ha evidentemente $\Delta\vartheta_{\text{circ}} = 2\pi/\sqrt{\gamma}$. La condizione su \mathcal{V}' impone poi che sia $\beta < 0$, e le (2.48) e (2.49) si ottengono ponendo $\alpha = \gamma - 2$ e $k = -\beta$. Q.E.D.

Occorre ora prendere in considerazione le orbite limitate non circolari. Supponendo L fissato, si avrà in corrispondenza di \bar{w} un valore $C_{\min} = \mathcal{V}^*(\bar{w})$, e per $C_{\min} < C < C_{\max}$, con un C_{\max} opportuno, si avranno orbite limitate. Nei casi dei potenziali della forma (2.48) sarà $C_{\max} = 0$ per $-2 < \alpha < 0$, e $C_{\max} = +\infty$ per $\alpha > 0$ e per il potenziale logaritmico. Per queste orbite si avrà un angolo $\Delta\vartheta$ dipendente, in generale, da C . Vale a tal proposito il seguente

Lemma 2.7: *Per i campi di forze centrali con energia potenziale della forma (2.48) si ha*

$$(2.50) \quad \lim_{C \rightarrow +\infty} \Delta\vartheta = \pi$$

per $\alpha > 0$ e per il caso logaritmico, e

$$(2.51) \quad \lim_{C \rightarrow 0^-} \Delta\vartheta = \frac{2\pi}{2+\alpha}$$

per $-2 < \alpha < 0$.

Dimostrazione. In ambedue i casi si calcola $\Delta\vartheta$ mediante la formula generale (2.25), ossia

$$\Delta\vartheta = 2 \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \frac{dw}{\sqrt{2[C - \mathcal{V}^*(w)]}},$$

che si scrive in forma più esplicita

$$(2.52) \quad \Delta\vartheta = 2 \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \frac{dw}{\sqrt{2[C - \frac{1}{2}w^2 - \frac{\mu}{L^2}V(\frac{1}{w})]}}.$$

tal fine, basta che la funzione $\mathcal{V}^*(w)$ abbia un punto di minimo, diciamo in \bar{w} ; a tale punto corrisponderà nel piano r, ϑ un'orbita circolare di raggio $\bar{r} = 1/\bar{w}$, percorsa con velocità uniforme. Se si considera L fissato e $C \geq C_{\min}$ si avrà un'orbita limitata prossima ad una circonferenza, per la quale ha senso definire l'angolo $\Delta\vartheta$ tra due pericentri consecutivi. Ha quindi senso definire $\Delta\vartheta_{\text{circ}}$ come il limite di $\Delta\vartheta$ per orbite infinitamente vicine a quella circolare. Si ha allora il seguente

Lemma 2.5: *Si consideri un campo di forze centrali con energia potenziale $V(r)$, e sia $\mathcal{V}(w) = V(1/w)$; sia inoltre $w(\vartheta) = \bar{w}$ una soluzione di equilibrio dell'equazione dell'orbita (2.22), soddisfacente l'ulteriore condizione*

$$(2.45) \quad 1 + \frac{\mu}{L^2} \mathcal{V}''(\bar{w}) > 0 .$$

Allora si ha

$$(2.46) \quad \Delta\vartheta_{\text{circ}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{\bar{w}\mathcal{V}''(\bar{w})}{\mathcal{V}'(\bar{w})}}} .$$

Dimostrazione. Perchè \bar{w} sia soluzione di equilibrio stabile deve annullarsi la derivata prima di $\mathcal{V}^*(w)$, ossia deve essere

$$(2.47) \quad \bar{w} + \frac{\mu}{L^2} \mathcal{V}'(\bar{w}) = 0$$

La (2.45) assicura che \bar{w} è un punto di minimo, e quindi per dati iniziali prossimi a \bar{w} si hanno oscillazioni. Approssimando $\mathcal{V}^*(w)$, a meno di una costante inessenziale, con la parte quadratica dello sviluppo di \mathcal{V}^* nell'intorno di \bar{w} , ossia con

$$\left(1 + \frac{\mu}{L^2} \mathcal{V}''(\bar{w})\right) \frac{(w - \bar{w})^2}{2} ,$$

si ottiene

$$\Delta\vartheta_{\text{circ}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{\mu}{L^2} \mathcal{V}''(\bar{w})}} .$$

La (2.46) si ottiene allora sostituendo il valore di L^2 ricavato dalla (2.47) Q.E.D.

Per quanto discusso sopra si vede che se esiste una soluzione di equilibrio stabile \bar{w} , ne esiste anche una famiglia parametrizzata da L ; in questo caso il lemma 2.5 consente di calcolare $\Delta\vartheta_{\text{circ}}$ come funzione di $\bar{w} = \bar{w}(L)$. Ci si può chiedere se esistano dei campi di forza caratterizzati dal fatto che $\Delta\vartheta_{\text{circ}}$ è indipendente da \bar{w} , ovvero da L . A questa domanda risponde il

Lemma 2.6: *I soli campi di forze centrali per cui $\Delta\vartheta_{\text{circ}}$ è indipendente dal raggio dell'orbita circolare sono quelli con energia potenziale*

$$(2.48) \quad \begin{aligned} V(r) &= \frac{k}{\alpha} r^\alpha , & \alpha \neq 0 , \alpha > -2 , \\ V(r) &= k \ln r , \end{aligned}$$

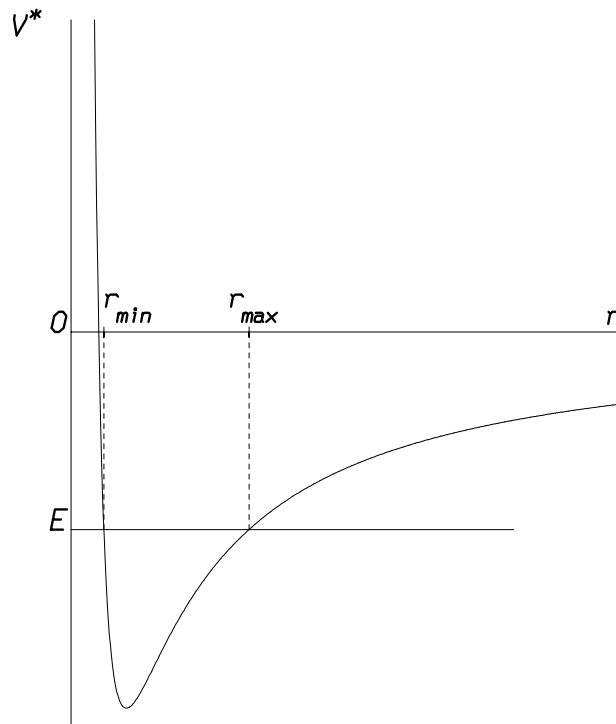


Figure 2.10. L'andamento del potenziale efficace $V^*(r)$ nel caso Kepleriano.

del valore di p dato dalla (2.40) si calcola

$$(2.43) \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2\mu}.$$

Se infine si ricorda che per la legge di gravitazione universale è $k = Gm_1m_2$, e che la massa ridotta è $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$, si ottiene

$$(2.44) \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}.$$

Si vede dunque che la terza legge di Keplero può considerarsi ben verificata solo se la massa del pianeta è trascurabile rispetto a quella del sole.

2.5 Potenziali con orbite chiuse

Un problema interessante, risolto da Bertrand^[6], consiste nel cercare potenziali caratterizzati dal fatto che tutte le orbite limitate sono chiuse; questo studio fornisce anche l'occasione per mettere in evidenza altri aspetti del problema del moto centrale.

Un primo risultato si può ottenere applicando alla (2.22) il metodo di approssimazione delle piccole oscillazioni in prossimità di un punto di equilibrio stabile. A

^[6] Bertrand, J. (1873), *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, tome LXXVII. La dimostrazione qui riportata è suggerita in Arnold, (1974), cap. 2, § 8. Una dimostrazione tecnicamente diversa è riportata in Tisserand (1891), Vol. I, pp. 43-48.

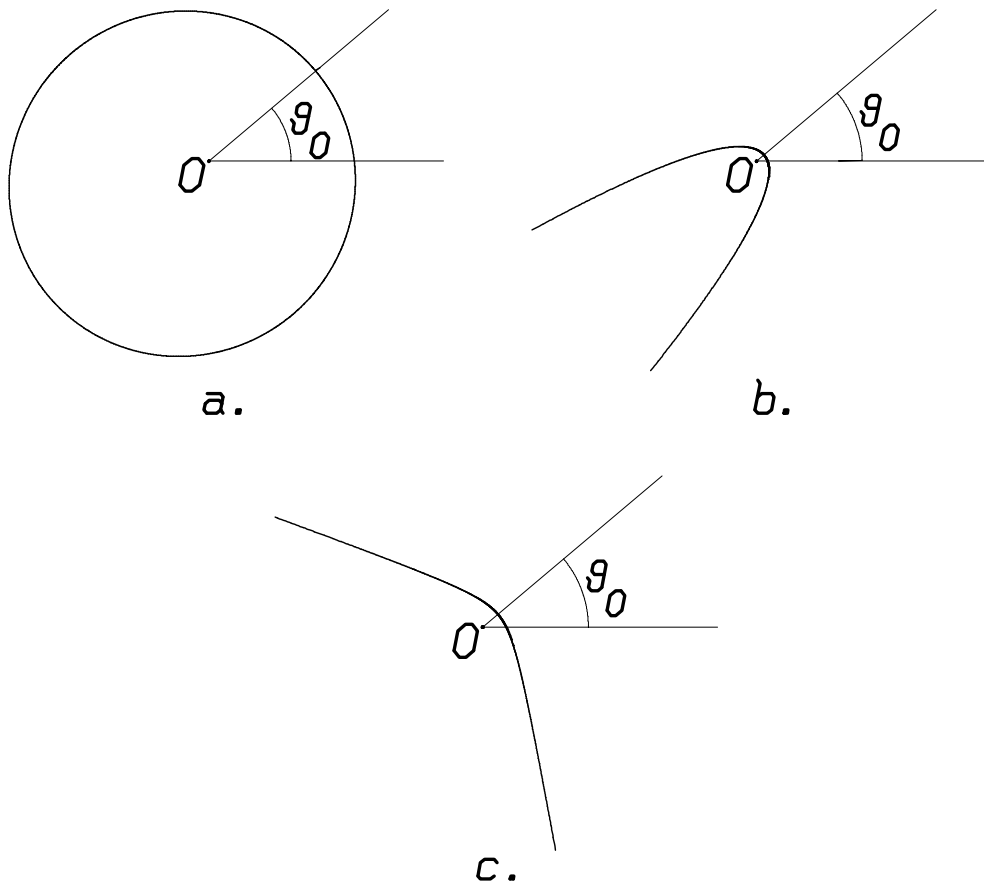


Figure 2.9. Orbita nel piano r, ϑ per il caso Kepleriano. a) ellisse, $0 \leq r < 1$; b) parabola, $e = 1$; c) iperbole, $e > 1$. L'angolo ϑ_0 determina la direzione del perielio.

si riottiene così l'equazione (2.39), con

$$(2.42) \quad p = \frac{L^2}{k\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{k^2\mu}}.$$

A conclusione di questa analisi si può tornare a confrontare i risultati dedotti dalla dinamica con le leggi di Keplero.

La forma ellittica delle orbite col sole in un fuoco, stabilita dalla prima legge, risulta pienamente confermata dal modello dei due corpi. Si vede però che, accanto alle orbite ellittiche, viene messa in evidenza anche la possibilità che esistano orbite paraboliche e iperboliche, sconosciute a Keplero.

Più delicato è il confronto con la terza legge di Keplero. Si tratta qui di calcolare il rapporto a^3/T^2 , e controllare se dipende solo dal sole. Il periodo T si calcola mediante la velocità areolare, e si ottiene $T = 2\pi ab\mu/L$; dove a e b sono i semiassi maggiore e minore dell'ellisse. Facendo poi uso delle relazioni (1.2) tra gli elementi dell'ellisse, e

la soluzione è

$$(2.37) \quad w(\vartheta) = \bar{w} + A \cos(\vartheta - \vartheta_0) ,$$

dove \bar{w} è il punto di minimo di \mathcal{V}^* , dato dalla (2.34). Le costanti ϑ_0 e A devono essere determinate mediante i dati iniziali; in particolare, dalle (2.35) segue

$$(2.38) \quad A = \sqrt{\frac{k^2 \mu^2}{L^4} + 2C} .$$

Ricordando che $w = 1/r$, la (2.37) può scriversi

$$(2.39) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos(\vartheta - \vartheta_0)} ,$$

dove

$$(2.40) \quad p = \frac{L^2}{k\mu} , \quad e = \sqrt{1 + \frac{2CL^4}{k^2\mu^2}} .$$

L'orbita è dunque in ogni caso una conica con fuoco nel centro delle forze; restano da discutere in maggior dettaglio i casi già illustrati sopra, rappresentati in figura 2.9.

- a. Per $C_{\min} \leq C < 0$ si ha $0 \leq e < 1$, quindi l'orbita è un'ellisse (in particolare una circonferenza per $e = 0$), in accordo con la prima legge di Keplero; questo vale per tutti gli stati legati. Il calcolo esplicito di $\Delta\vartheta$ è superfluo, perchè è evidentemente $\Delta\vartheta = 2\pi$.
- b. Per $C = 0$ si ha $e = 1$; l'orbita è una parabola, e l'angolo di scattering coincide col periodo di $w(\vartheta)$, ossia è $\Delta\vartheta = 2\pi$.
- c. Per $C > 0$ si ha $e > 1$; l'orbita è un'iperbole sia nel caso attrattivo che nel caso repulsivo. Gli angoli di scattering $\Delta\vartheta_+$ del caso attrattivo e $\Delta\vartheta_-$ del caso repulsivo soddisfano evidentemente la relazione $\Delta\vartheta_+ + \Delta\vartheta_- = 2\pi$. La funzione $w(\vartheta)$ si annulla per $\cos(\vartheta - \vartheta_0) = \bar{w}/A$; quindi si ha

$$\Delta\vartheta_+ = 2 \left(\pi - \arccos \frac{1}{e} \right) , \quad \Delta\vartheta_- = 2 \arccos \frac{1}{e} .$$

Nella letteratura questa discussione è frequentemente riportata facendo riferimento direttamente alla distanza r , secondo lo schema descritto alla fine dei paragrafi 2.2.3 e 2.3. In tal caso il potenziale efficace $V^*(r)$ si scrive

$$(2.41) \quad V^*(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} ,$$

ed ha l'andamento rappresentato in figura 2.10. Il calcolo dell'orbita si effettua risolvendo la (2.21), ossia calcolando

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int^r \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{E + \frac{k}{\rho} - \frac{L^2}{2\mu\rho^2}}} ;$$

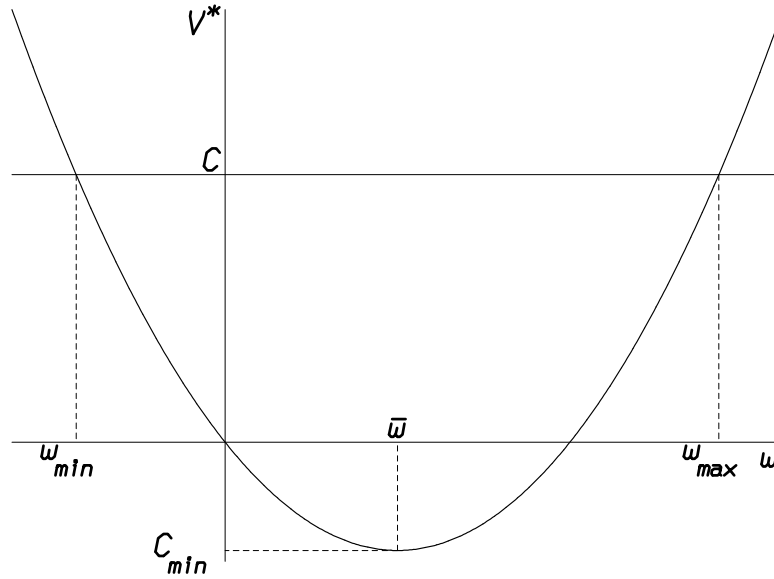


Figure 2.8. Il grafico della funzione $\mathcal{V}^*(w)$ nel caso Kepleriano.

osservazioni del paragrafo 2.3, si vede che eventuali soluzioni dell'equazione dell'orbita con valori negativi di w descrivono proprio il caso repulsivo.

Si ha qui

$$(2.33) \quad \mathcal{V}^*(w) = \frac{1}{2}w^2 - \frac{k\mu}{L^2}w ;$$

questa è una parabola passante per l'origine (figura 2.8). Il punto di minimo \bar{w} ed il valore minimo C_{\min} di \mathcal{V}^* si hanno per

$$(2.34) \quad \bar{w} = \frac{k\mu}{L^2}, \quad C_{\min} = -\frac{k^2\mu^2}{2L^4}$$

Per $C > C_{\min}$ la soluzione $w(\vartheta)$ dell'equazione dell'orbita oscilla periodicamente nell'intervallo $w_{\min} \leq w \leq w_{\max}$, con

$$(2.35) \quad w_{\min} = \bar{w} - \sqrt{\frac{k^2\mu^2}{L^4} + 2C}, \quad w_{\max} = \bar{w} + \sqrt{\frac{k^2\mu^2}{L^4} + 2C}$$

(si noti che il radicando è sempre positivo). Si vede subito che al variare di C si dovranno distinguere tre casi.

- a. Per $C < 0$ si ha $0 < w_{\min} < w_{\max}$, quindi si hanno solo stati legati.
- b. Per $C = 0$ si ha $0 = w_{\min} < w_{\max}$, quindi si ha uno stato d'urto.
- c. Per $C > 0$ si ha $w_{\min} < 0 < w_{\max}$, quindi si ha una coppia di stati d'urto, uno corrispondente al caso attrattivo, $0 < w \leq w_{\max}$, e l'altro al caso repulsivo $w_{\min} \leq w < 0$.

Per determinare l'orbita conviene riferirsi senz'altro all'equazione (2.12), che in questo caso si scrive

$$(2.36) \quad \frac{d^2w}{d\vartheta^2} + w = \frac{k\mu}{L^2} ;$$

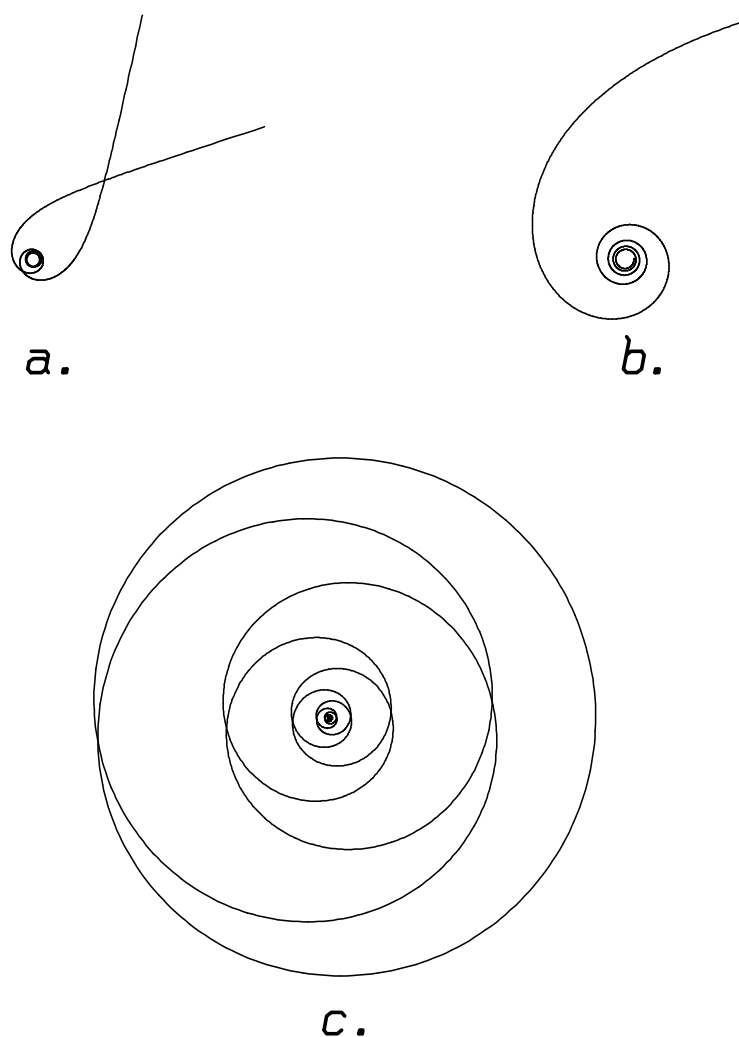


Figure 2.7. Orbite nel piano r, ϑ nel caso del potenziale $V(r) = k/(2r^3)$. I casi a, b e c corrispondono a quelli già illustrati nella figura 2.6. Nel caso a il punto può provenire dall'infinito, e percorre un'orbita a spirale attorno al centro fino a raggiungere il pericentro; poi si allontana percorrendo un'orbita simmetrica a quella di arrivo. Nel caso b il punto può provenire dall'infinito, e cade sul centro percorrendo un'orbita a spirale; la stessa orbita viene percorsa a ritroso se si inverte la velocità. Nel caso c, per $C < 0$, il punto può percorrere un'orbita a spirale che si allontana dal centro fino a raggiungere la massima distanza consentita dalla sua energia, poi ricade sul centro sempre seguendo un'orbita a spirale.

2.4.3 Il caso Kepleriano

Il caso di maggiore interesse per la meccanica celeste, alla luce di quanto già esposto, è quello della forza gravitazionale, $f(r) = -k/r^2$, ovvero $V(r) = -k/r$; per $k < 0$ si ha il caso di una forza repulsiva, che non è di interesse immediato per la meccanica celeste, ma si presenta ad esempio nello studio del campo elettrico. La discussione può tuttavia limitarsi al solo caso $k > 0$: se si osserva che $V(-r) = -V(r)$, e si ricordano le

Per il calcolo esplicito dell'orbita conviene senz'altro far uso direttamente dell'equazione (2.12), che qui diventa

$$(2.32) \quad \frac{d^2 w}{d\vartheta^2} + \left(1 - \frac{k\mu}{L^2}\right) w = 0 .$$

Si hanno dunque le situazioni seguenti, illustrate in figura 2.7.

a. Per $k\mu/L^2 < 1$ la soluzione della (2.32) è

$$w(\vartheta) = A \cos \left[\sqrt{1 - \frac{k\mu}{L^2}} (\vartheta - \vartheta_0) \right] ,$$

con A, ϑ_0 costanti di integrazione. L'angolo di scattering è $\Delta\vartheta = \pi/\sqrt{1 - k\mu/L^2}$.

b. Per $k\mu/L^2 = 1$ la soluzione della (2.32) è

$$w(\vartheta) = A\vartheta + B ,$$

con A e B costanti di integrazione; la semiretta $r > 0$ viene percorsa con un moto a spirale in vicinanza del centro e con un'orbita asintotica ad una retta per grandi distanze. Per esaminare il caso $C = 0$ occorre osservare che le condizioni iniziali $w(0) = w_0$ e $\frac{dw}{d\vartheta}(\vartheta_0) = v_0$ danno immediatamente $B = w_0$ e $A = v_0 = \sqrt{2C}$. Quindi per $C = 0$ si ha la soluzione $w(\vartheta) = w_0$, ed esistono solo orbite circolari con raggio arbitrario.

c. Per $k\mu/L^2 > 1$ la soluzione della (2.32) si scrive

$$w(\vartheta) = A \exp(\lambda\vartheta) + B \exp(-\lambda\vartheta) ,$$

con

$$\lambda = \sqrt{\frac{k\mu}{L^2} - 1} ,$$

e A, B costanti di integrazione. Le condizioni iniziali $w(0) = w_0$ e $\frac{dw}{d\vartheta}(\vartheta_0) = v_0$ danno

$$A = \frac{\exp(-\lambda\vartheta_0)}{2} \left(w_0 + \frac{v_0}{\lambda} \right)$$

$$B = \frac{\exp(\lambda\vartheta_0)}{2} \left(w_0 - \frac{v_0}{\lambda} \right) .$$

Occorre ora distinguere tre sottocasi. Per $C < 0$ si ha $|v_0| < \lambda w_0$, sicché A e B sono ambedue positivi; la soluzione descrive uno stato d'urto (figura 2.7a). Per $C > 0$ si ha invece $|v_0| > \lambda w_0$, sicché A e B risultano avere segno opposto; si ha dunque un'orbita che proviene dall'infinito e cade sul centro, o viceversa. Infine, il caso $C = 0$ separa i due casi precedenti: si ha $|v_0| = \lambda w_0$, sicché una delle due costanti A e B si annulla; anche qui l'orbita può percorrere tutto l'asse w , ma la velocità si annulla all'infinito.

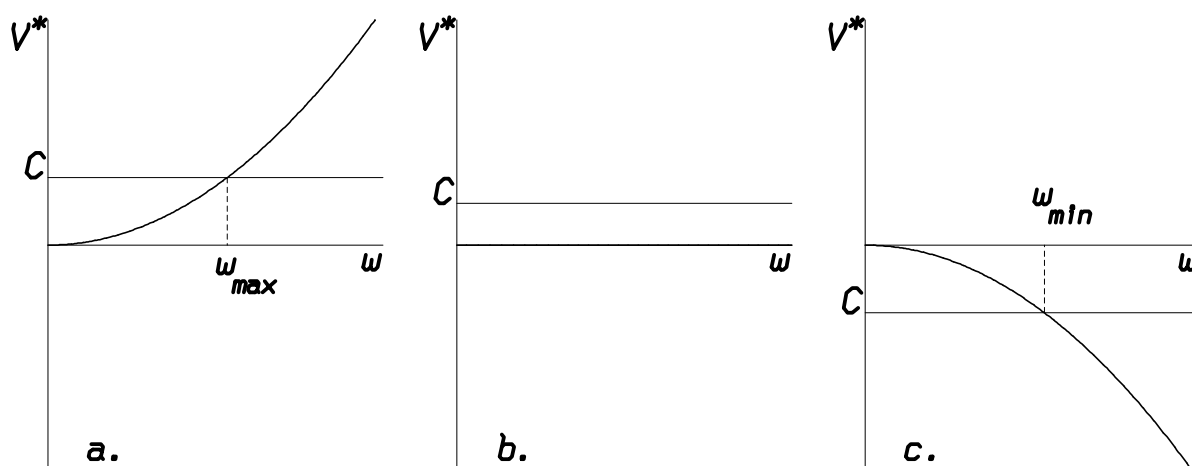


Figure 2.6. Andamento qualitativo di $\mathcal{V}^*(w)$ per il potenziale $V(r) = -k/(2r^2)$. Caso a: $k\mu/L^2 < 1$; stato d'urto con $r \geq r_{\max} = 1/w_{\max}$. Caso b: $k\mu/L^2 = 1$; movimento su tutta la semiretta $r > 0$. Caso c: $k\mu/L^2 > 1$; moto sull'intervallo $0 < r \leq r_{\max} = 1/w_{\min}$, con caduta sul centro, per $C < 0$, e moto su tutta la semiretta per $C \geq 0$.

o ancora, sostituendo $w = 1/r$,

$$(2.30) \quad \frac{1}{r^2} = C + \sqrt{C^2 - \frac{k\mu}{L^2}} \cos 2(\vartheta - \vartheta_0).$$

Per $k > 0$ questa è l'equazione di un'ellisse con centro nell'origine (figura 2.5). Il calcolo di $\Delta\vartheta$ è, a questo punto, superfluo, essendo palesemente $\Delta\vartheta = \pi$.

2.4.2 Il potenziale inversamente proporzionale al quadrato della distanza

Un secondo esempio, che ben si presta ad illustrare il caso di stati non legati, è costituito dalla forza attrattiva inversamente proporzionale al cubo della distanza: $f(r) = -k/r^3$, ovvero $V(r) = -k/(2r^2)$. Si ha dunque

$$(2.31) \quad \mathcal{V}^*(w) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k\mu}{L^2} \right) w^2.$$

L'esame delle curve $\mathcal{V}^*(w)$ rivela immediatamente che può verificarsi una delle situazioni che seguono, illustrate in figura 2.6.

- Per $k\mu/L^2 < 1$ si ha uno stato d'urto: il punto può avvicinarsi ad una distanza minima r_{\min} dal centro, ma poi viene respinto all'infinito.
- Per $k\mu/L^2 = 1$ il punto può percorrere tutta la semiretta $r > 0$, sia andandosene all'infinito, sia cadendo sul centro; ciò dipende dal segno della velocità radiale iniziale. Fa eccezione il caso $C = 0$, che viene discusso qui sotto.
- Per $k\mu/L^2 > 1$ occorre distinguere due sottocasi. Se $C < 0$ il moto è confinato in $0 < r \leq r_{\max}$, con un valore opportuno di r_{\max} , ed in ogni caso il punto precipita sul centro in un tempo finito. Se invece $C \geq 0$ il moto è ancora possibile su tutta la semiretta $r > 0$, come nel caso b.

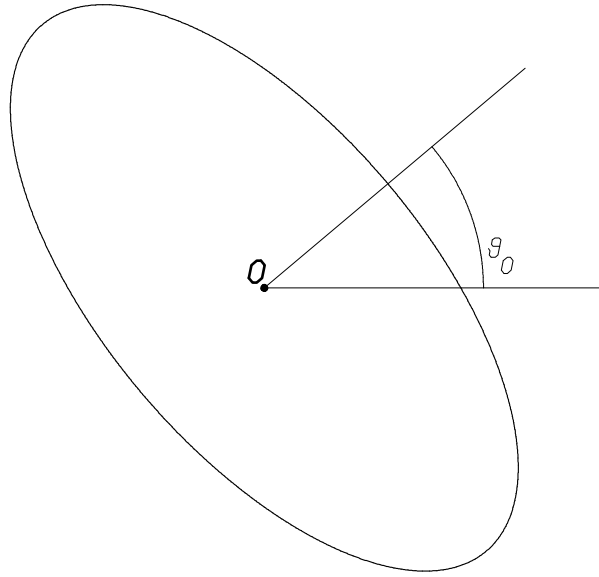


Figure 2.5. Orbita nel piano r, ϑ nel caso della forza attrattiva armonica. Si tratta di un'ellisse con centro nel centro delle forze.

mentre per $C > C_{\min}$ si ha l'andamento oscillante nell'intervallo $w_{\min} \leq w(\vartheta) \leq w_{\max}$, con

$$(2.29) \quad w_{\min} = \sqrt{C - \sqrt{C^2 - \frac{k\mu}{L^2}}}, \quad w_{\max} = \sqrt{C + \sqrt{C^2 - \frac{k\mu}{L^2}}}.$$

L'equazione dell'orbita (2.17) diventa in questo caso

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_{w_0}^w \frac{d\eta}{\sqrt{2C - \eta^2 - \frac{k\mu}{L^2\eta^2}}},$$

ed il calcolo dell'angolo $\Delta\vartheta$ secondo la formula generale (2.25) richiede di valutare questo stesso integrale tra gli estremi w_{\min} e w_{\max} .

Per il calcolo dell'integrale si effettua la sostituzione $\eta^2 = \xi$, e ci si riconduce a

$$\frac{1}{2} \int \frac{d\xi}{\sqrt{2C\xi - \xi^2 - \frac{k\mu}{L^2}}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\left(C^2 - \frac{k\mu}{L^2}\right) - (\xi - C)^2}},$$

e con l'ulteriore sostituzione $\xi - C = \sqrt{C^2 - \frac{k\mu}{L^2}} \cos \varphi$ quest'ultimo integrale dà semplicemente $\varphi/2$. Scegliendo ora il dato iniziale $w_0 = w_{\max}$ (ovvero scegliendo opportunamente ϑ_0) si ottiene

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{1}{2} \arccos \frac{w^2 - C}{\sqrt{C^2 - \frac{k\mu}{L^2}}},$$

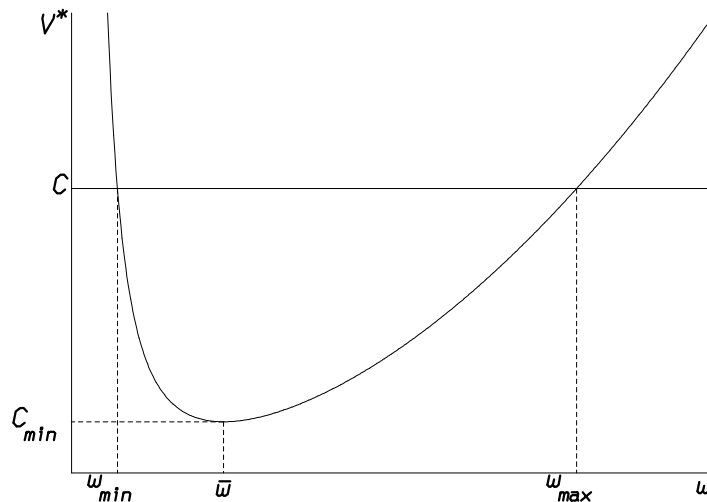


Figure 2.4. Il caso della forza attrattiva armonica, $\mathcal{V}^*(w) = w^2/2 + k\mu/(2L^2w^2)$. Il minimo è in $\bar{w} = (k\mu/L^2)^{1/4}$, e corrispondentemente si ha $C_{\min} = \mathcal{V}^*(\bar{w}) = \sqrt{k\mu}/L$.

iniziali, si ricava confrontando la (2.19) con la (2.22); si ottiene

$$(2.27) \quad C = \frac{\mu}{L^2} E .$$

La discussione qualitativa prosegue, a questo punto, in completa analogia con quella svolta nei paragrafi precedenti: basta riferirsi costantemente ad r anziché a w .

2.4 Il moto centrale: calcolo dell'orbita in casi particolarmente semplici ed interessanti

Il calcolo esplicito dell'orbita non è, in generale, agevole. Si conoscono tuttavia tre casi in cui si arriva ad una soluzione esplicita in termini di funzioni trigonometriche, e dunque con metodi semplici: il caso del potenziale armonico, quello del potenziale Kepleroiano, e quello del potenziale inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro.^[5]

2.4.1 Il potenziale armonico

Come esempio particolarmente semplice, si consideri il caso di una *forza attrattiva armonica*: $f(r) = -kr$, ovvero $V(r) = kr^2/2$; si ha dunque

$$(2.28) \quad \mathcal{V}^*(w) = \frac{1}{2}w^2 + \frac{k\mu}{2L^2w^2} .$$

L'andamento qualitativo di $\mathcal{V}^*(w)$ è rappresentato in figura 2.4: il minimo è nel punto $\bar{w} = (k\mu/L^2)^{1/4}$, ed ivi è $C_{\min} = \mathcal{V}^*(\bar{w}) = \sqrt{k\mu}/L$; per $C = C_{\min}$ l'orbita è circolare,

^[5] Si veda ad esempio Whittaker, 1937, § 48.

2.3.4 Orbite asintotiche a orbite circolari

Come ultimo caso si consideri la possibilità che il potenziale $\mathcal{V}^*(w)$ abbia un massimo, diciamo in $w = \bar{w}$. Anche in questo caso $w(\vartheta) = \bar{w}$ è una soluzione dell'equazione dell'orbita, corrispondente a $C = \bar{C} = \mathcal{V}^*(\bar{w})$; nel piano r, ϑ questa soluzione è ancora un'orbita circolare che viene percorsa con velocità angolare uniforme $\dot{\vartheta} = L\bar{w}^2/\mu$. A differenza del caso del minimo però quest'orbita è instabile. Per $C < \bar{C}$ la condizione (2.24) esclude il punto \bar{w} , e dunque le orbite corrispondenti non incrociano quella circolare; per $C > \bar{C}$ invece il punto \bar{w} risulta interno all'intervallo determinato dalla (2.24), ma, a parte il fatto che $|v|$ ha un minimo in corrispondenza a questo punto, non ha particolare rilevanza per la dinamica.

Il comportamento delle orbite per $C = \bar{C}$ è più interessante. Per quanto riguarda il comportamento locale, è noto che orbite $w(\vartheta)$ con dato iniziale in un intorno di \bar{w} sono asintotiche a \bar{w} o per $t \rightarrow -\infty$ o per $t \rightarrow +\infty$. Nel piano r, ϑ si hanno orbite asintotiche a quella circolare instabile, percorse con velocità angolare che tende a diventare uniforme per $t \rightarrow -\infty$ o per $t \rightarrow +\infty$.^[4]

Lo studio del comportamento globale di queste orbite si svolge tenendo conto dei risultati discussi nei paragrafi precedenti. L'informazione rilevante è contenuta ancora nella condizione (2.24). Ad esempio, se tale condizione è verificata su un intervallo $\bar{w} \leq w \leq w_{\max}$ con w_{\max} finito, e se $\mathcal{V}^*(w) < \bar{C}$ su tutto l'intervallo aperto, allora l'orbita che tende asintoticamente a \bar{w} per $\vartheta \rightarrow -\infty$ potrà ben allontanarsi fino a w_{\max} , ma poi tornerà a cadere asintoticamente su \bar{w} per $\vartheta \rightarrow +\infty$. Se all'interno dell'intervallo $[w, w_{\max}]$ esiste un altro punto, diciamo \tilde{w} , tale che $\mathcal{V}^*(\tilde{w}) = \bar{C}$ (e dunque anch'esso un massimo), allora esistono sia orbite asintotiche a \bar{w} per $\vartheta \rightarrow -\infty$ ed a \tilde{w} per $\vartheta \rightarrow +\infty$ che orbite asintotiche a \tilde{w} per $\vartheta \rightarrow -\infty$ ed a \bar{w} per $\vartheta \rightarrow +\infty$. Infine, se la (2.24) è soddisfatta su tutto l'intervallo $w \geq \bar{w}$, con $\mathcal{V}^*(w) < C$ per $w > \bar{w}$, allora si hanno orbite asintotiche a \bar{w} , e che cadono sul centro, oppure ne escono, come descritto nel paragrafo 2.3.3. La discussione relativa all'intervallo $w < \bar{w}$ è sostanzialmente la stessa, salvo sostituire la caduta sul centro con la fuga all'infinito, ed è lasciata al lettore.

Anche questa analisi qualitativa può svolgersi utilizzando direttamente la variabile r , anziché introdurre w . Invece della funzione $\mathcal{V}^*(w)$ si deve allora considerare il potenziale efficace $V^*(r)$, e la (2.16) deve essere sostituita dalla (2.19). Si noti che questo corrisponde a reintrodurre il tempo t , e non ϑ , come variabile indipendente. La condizione (2.24) viene sostituita a sua volta da

$$V^*(r) \leq E ,$$

e questa determina l'intervallo $[r_{\min}, r_{\max}]$ (che può ancora estendersi all'infinito in caso di stato d'urto o comprendere l'origine in caso di caduta sul centro). La costante C viene sostituita dall'energia E ; la relazione tra queste due costanti, ambedue determinate dai dati

[4] La dinamica di queste orbite diventa più facilmente comprensibile se si fa uso della rappresentazione sul piano di fase: si tratta semplicemente delle separatrici che si formano in prossimità di un punto di equilibrio iperbolico. Questo metodo verrà illustrato brevemente più avanti, nel capitolo sui sistemi Hamiltoniani.

(2.13) dice che per $w \rightarrow \infty$ si ha $\dot{v} \rightarrow \pm\infty$ (il segno dipende da L , ossia dal dato iniziale); dunque il moto in prossimità del centro è una spirale che viene percorsa a velocità angolare crescente oltre ogni limite.

È spontaneo chiedersi quanto tempo richieda la caduta. Per rispondere a questa domanda si deve stimare l'andamento della funzione $w(t)$ per w grandi. Facendo uso ancora delle equazioni (2.12) e (2.13), nonché dell'integrale primo (2.22), si ricava subito

$$(2.26) \quad \dot{w} = \frac{Lw^2}{\mu} \sqrt{2[C - \mathcal{V}^*(w)]} .$$

Il caso più semplice si ha quando $C - \mathcal{V}^*(w)$ tende ad un limite finito e non nullo per $w \rightarrow +\infty$. Allora per w sufficientemente grande si può approssimare la (2.26) con l'equazione

$$\dot{w} = \alpha w^2 ,$$

dove $\alpha \neq 0$ è una costante; i casi $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$ corrispondono rispettivamente ad una caduta e ad un'uscita dal centro. La soluzione corrispondente alla condizione iniziale $w(t_0) = w_0$ è

$$w(t) = \frac{w_0}{1 - \alpha w_0(t - t_0)} .$$

Si vede che la soluzione ha un polo per $t = t_0 + 1/(\alpha w_0)$; dunque la caduta avviene in un tempo finito.

La descrizione qualitativa diventa più complessa se $C - \mathcal{V}^*(w) \rightarrow 0$ per $w \rightarrow +\infty$; in questo caso diventa rilevante considerare il comportamento all'infinito del membro di destra della (2.26). Come esempio significativo, si consideri il caso in cui per w sufficientemente grande si abbia

$$C - \mathcal{V}^*(w) \simeq \frac{k}{w^{2\beta}} , \quad \beta \geq 0 .$$

Questo caso si verifica, ad esempio, se il potenziale $V(r)$ ha la forma

$$V(r) = -\frac{k}{r^2} + r^{2\beta} ,$$

con una scelta opportuna delle costanti L e C , ossia dei dati iniziali. Allora l'equazione (2.26) può approssimarsi con

$$\dot{w} = \alpha w^{2-\beta} ,$$

con una costante opportuna $\alpha \neq 0$. La soluzione corrispondente alla condizione iniziale $w(t_0) = w_0$ è

$$\begin{aligned} w(t) &= [w_0 + \alpha(\beta - 1)(t - t_0)]^{1/(\beta-1)} && \text{per } \beta \neq 1 , \\ w(t) &= w_0 \exp[\alpha(t - t_0)] && \text{per } \beta = 1 . \end{aligned}$$

Se ne deduce che il tempo di caduta resta finito per $\beta < 1$, e diventa infinito per $\beta \geq 1$.

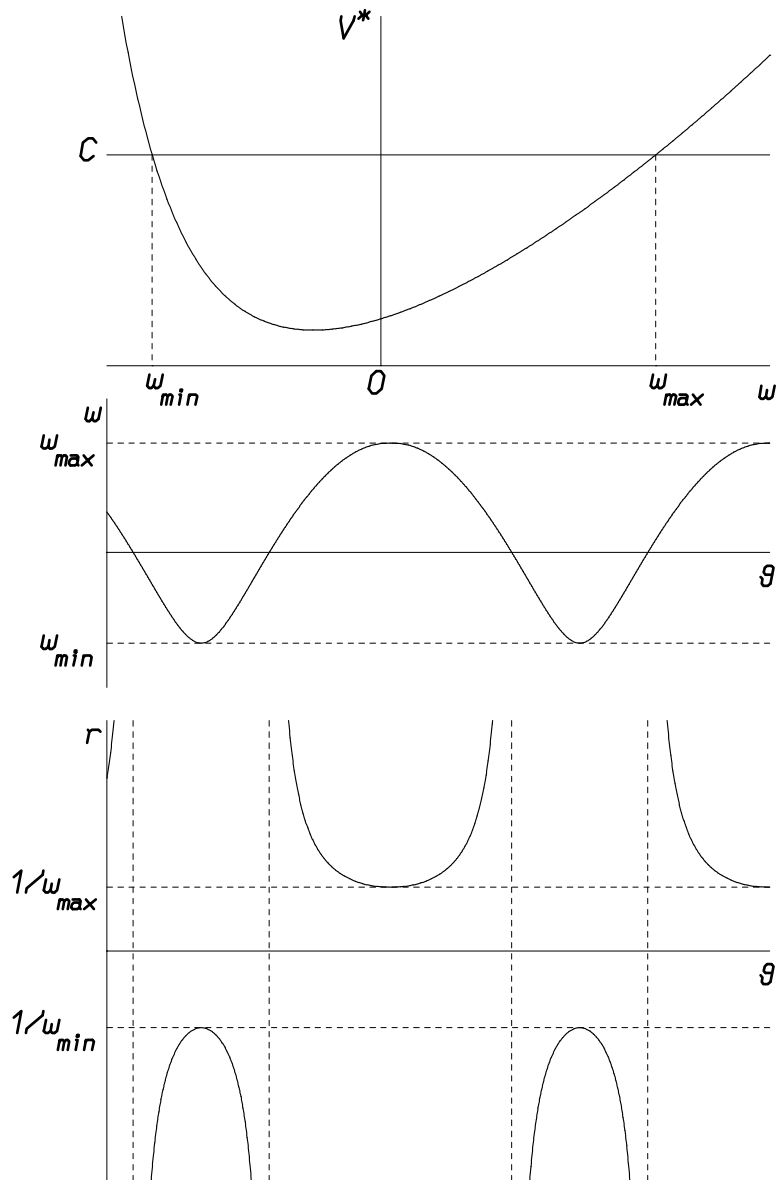


Figure 2.3. Andamento qualitativo di $\mathcal{V}^*(w)$, $w(\vartheta)$ e $r(\vartheta)$ quando l'intervallo $[w_{\min}, w_{\max}]$ contiene l'origine. Gli zeri di $w(\vartheta)$ corrispondono agli asintoti di $r(\vartheta)$.

2.3.3 Caduta sul centro

Un'altra possibilità è che l'intervallo $[w_{\min}, w_{\max}]$ si estenda fino all'infinito; ciò può verificarsi nel caso di un campo di forze attrattivo la cui intensità per $r \rightarrow 0$ cresca abbastanza rapidamente, sì da superare la forza centrifuga. Per semplicità, si supponga che la condizione (2.24) sia soddisfatta per $w \geq w_{\min} > 0$; allora si ha necessariamente $w(\vartheta) \rightarrow +\infty$ sia per $\vartheta \rightarrow -\infty$ che per $\vartheta \rightarrow +\infty$. Questo corrisponde ad un'orbita che può ben partire arbitrariamente vicino al centro ed allontanarsene fino ad una distanza $r_{\max} = 1/w_{\min}$, ma poi ricade inevitabilmente sul centro. Contemporaneamente, la

problemi si tornerà in seguito; qui basti osservare che il calcolo di $\Delta\vartheta$ può effettuarsi integrando la (2.22) sull'intervallo $[w_{\min}, w_{\max}]$, ossia calcolando^[3]

$$(2.25) \quad \Delta\vartheta = 2 \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} \frac{dw}{\sqrt{2[C - \mathcal{V}^*(w)]}}$$

(si tenga conto del fatto che $v = \frac{dw}{d\vartheta}$, e che la (2.22) è quadratica in v).

2.3.2 Stati d'urto

La discussione qualitativa è meno semplice se l'intervallo $[w_{\min}, w_{\max}]$ contiene l'origine, o si estende fino all'infinito.

Il caso di un intervallo che contiene l'origine si verifica quando la forza $f(r)$ diventa repulsiva o si annulla per $r \rightarrow \infty$. In questo caso la funzione $w(\vartheta)$ si può ancora ricavare come nel caso precedente, e si tratta ancora di una funzione periodica in ϑ , ma subisce due cambiamenti di segno nel corso di un'oscillazione, e si deve tener conto del fatto che il raggio r diventa infinito all'annullarsi di $w(\vartheta)$. È facile vedere che si può determinare un intervallo $[\vartheta_0, \vartheta_1]$ tale che $w(\vartheta_0) = w(\vartheta_1) = 0$ e $w(\vartheta) > 0$ per $\vartheta_0 < \vartheta < \vartheta_1$ (figura 2.3). Se si impone l'ovvia condizione che sia $r > 0$, si devono considerare come significativi i soli valori $w(\vartheta)$ soddisfacenti $0 < w(\vartheta) \leq w_{\max}$, il che equivale a considerare il solo intervallo $(\vartheta_0, \vartheta_1)$. Nel piano r, ϑ si ha che la distanza r diventa infinita agli estremi dell'intervallo, dove l'orbita diventa asintotica a due semirette di direzioni ϑ_0, ϑ_1 , e che il punto non può avvicinarsi al centro ad una distanza inferiore a $r_{\min} = 1/w_{\max}$. Si parla in questo caso di *stato d'urto*, e l'angolo $\Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_0$ viene detto *angolo di scattering*.

Per quanto riguarda il comportamento all'infinito, si può osservare che dalle equazioni (2.12) e (2.13) si ha

$$\dot{w} = \frac{dw}{d\vartheta} \dot{\vartheta} = \frac{L}{\mu} v w^2 ;$$

facendo uso anche dell'integrale primo (2.22) e di $r = 1/w$ si ottiene

$$\dot{r} = -\frac{\dot{w}}{w^2} = \pm \frac{L}{\mu} \sqrt{2 \left[C - \mathcal{V}^* \left(\frac{1}{r} \right) \right]}$$

(il segno dipende dal dato iniziale); pertanto al tendere di r all'infinito il movimento tende a diventare rettilineo uniforme, con velocità $\pm \sqrt{2[C - \mathcal{V}^*(0)]}$ (si osservi che la velocità angolare $\dot{\vartheta}$ si annulla in virtù della (2.13), poiché $w \rightarrow 0$).

Gli intervalli in cui $w(\vartheta)$ diventa negativa non sono da considerarsi significativi, per il potenziale in esame. A questi si può attribuire un significato cambiando segno a r , ossia considerando un'energia potenziale $\mathcal{V}'(r) = \mathcal{V}(-r)$, per la quale si ha la stessa descrizione qualitativa.

[3] Si noti che questo è il procedimento che solitamente si segue per calcolare il periodo di oscillazione intorno ad una soluzione di equilibrio; ciò è dovuto proprio al fatto di considerare ϑ come tempo.

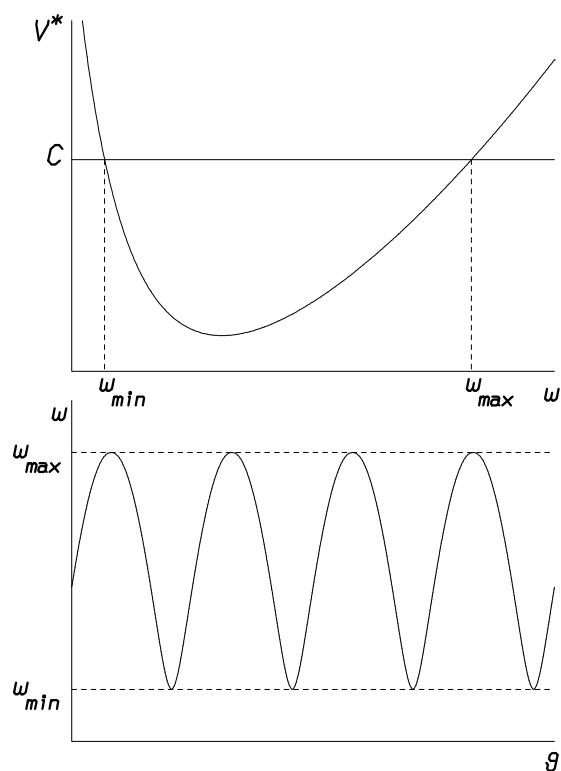


Figure 2.1. Andamento qualitativo della soluzione dell'equazione dell'orbita in prossimità di un minimo di $\mathcal{V}^*(w)$: la soluzione oscilla periodicamente nell'intervallo $w_{min} \leq w \leq w_{max}$.

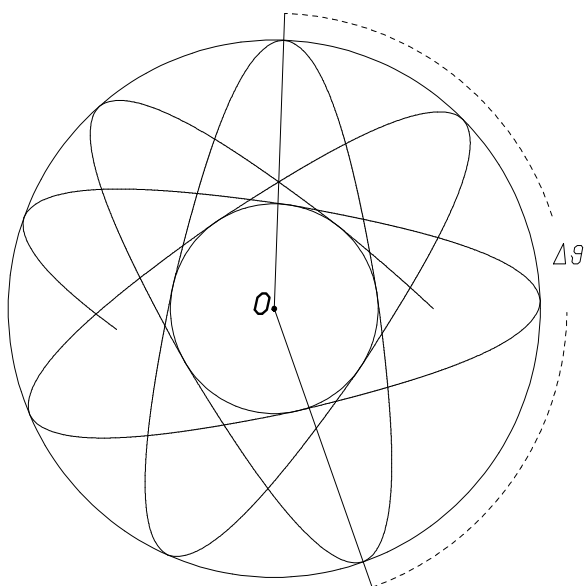


Figure 2.2. Rappresentazione della soluzione dell'equazione dell'orbita nel piano r, ϑ , nel caso di uno stato legato. L'angolo $\Delta\vartheta$ è il periodo della soluzione $r(\vartheta)$.

l'equazione di un punto materiale su una retta soggetto alla forza $-w - \frac{\mu f}{L^2 w^2}$. Questo è giustificato dalla (2.11), che assicura che $\vartheta(t)$ è funzione monotona del tempo. Convienne allora far uso dell'integrale primo (2.16), riscrivendolo nella forma

$$(2.22) \quad \frac{1}{2}v^2 + \mathcal{V}^*(w) = C ;$$

qui il termine $v^2/2$ svolge il ruolo di energia cinetica, e $\mathcal{V}^*(w)$ quello di energia potenziale, essendo

$$(2.23) \quad \mathcal{V}^*(w) = \frac{1}{2}w^2 + \frac{\mu}{L^2}V\left(\frac{1}{w}\right) .$$

Il punto potrà raggiungere solo le posizioni w soddisfacenti la condizione

$$(2.24) \quad \mathcal{V}^*(w) \leq C ;$$

questo è già sufficiente per ottenere interessanti informazioni qualitative sul comportamento dell'orbita. Il resto di questo paragrafo è dedicato a questa discussione.

2.3.1 *Stati legati*

È particolarmente interessante il caso in cui $\mathcal{V}^*(w)$ abbia un minimo; in tal caso esisterà un intervallo di valori di C per cui la (2.24) determina un intervallo $[w_{\min}, w_{\max}]$ entro il quale la funzione $w(\vartheta)$ non può che oscillare (figura 2.1). Se si ricorda che $w = 1/r$, e se l'intervallo $[w_{\min}, w_{\max}]$ giace sulla semiretta $w > 0$, segue che la distanza r soddisfa sempre $r_{\min} \leq r(\vartheta) \leq r_{\max}$, con $r_{\min} = 1/w_{\max}$ e $r_{\max} = 1/w_{\min}$; si parlerà in questo caso di *stato legato*. In particolare, se \bar{w} è il punto di minimo di $\mathcal{V}^*(w)$, e si denota $C_{\min} = \mathcal{V}^*(\bar{w})$, si ha che $w(\vartheta) = \bar{w}$ è una soluzione di equilibrio della (2.12); lo stesso accade ovviamente per tutti quei punti (non necessariamente di minimo) ove si annulla la derivata prima di $\mathcal{V}^*(w)$.

È naturale chiedersi, a questo punto, quale sia la forma dell'orbita nel piano r, ϑ . La soluzione di equilibrio si interpreta facilmente: l'orbita è circolare, essendo $r(\vartheta) = 1/\bar{w}$, e viene percorsa con moto uniforme, ossia $\vartheta(t) = \vartheta_0 + L\bar{w}^2 t/\mu$, come si ricava subito dalla (2.13). Per $C - C_{\min} > 0$ e sufficientemente piccolo il moto si svolge entro una corona circolare $r_{\min} \leq r(\vartheta) \leq r_{\max}$ (figura 2.2). Si osservi bene che $r(\vartheta)$ è certamente una funzione periodica, ma non è detto che l'orbita sia a sua volta una funzione periodica, nè che abbia una forma semplice: la quantità rilevante qui è il periodo $\Delta\vartheta$ della funzione $w(\vartheta)$, o, equivalentemente, l'angolo che intercorre tra due perielii consecutivi: l'orbita si chiude se e solo se $\Delta\vartheta/(2\pi)$ è un numero razionale. Se si considera l'evoluzione nel tempo, si potranno identificare in generale due periodi: il primo, T_r , è il tempo necessario per percorrere l'angolo $\Delta\vartheta$, o il tempo che intercorre tra due perielii consecutivi; il secondo, T_ϑ , è il tempo medio necessario perchè ϑ si incrementi di 2π . È immediato osservare che sarà $T_r/T_\vartheta = \Delta\vartheta/(2\pi)$.^[2] Su questi

^[2] Nella descrizione Kepleriana non si trova traccia di questi due periodi, ma ciò è dovuto al fatto eccezionale che $T_r = T_\vartheta$.

Occorre dunque una prima quadratura per ottenere ϑ come funzione di w ; occorre poi invertire la relazione così ottenuta e sostituirla nella (2.13); infine si deve eseguire una seconda quadratura per determinare $\vartheta(t)$. Si è così dimostrata la

Proposizione 2.4: *Il problema del moto centrale con forza dipendente dalla sola distanza è integrabile per quadrature.*

Un procedimento equivalente, che evita l'introduzione della variabile w , è il seguente. Si parte direttamente dal sistema (2.10), e si mostra che esso ammette gli integrali primi

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \mu r^2 \dot{\vartheta} &= L \\ \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) + V(r) &= E, \end{aligned}$$

dove L ed E sono costanti di integrazione, e $V(r)$ è l'energia potenziale. A questo si giunge in modo naturale se si fa uso del teorema di conservazione dell'energia, che dà immediatamente la seconda delle (2.18). Ricavando poi $\dot{\vartheta}$ dalla prima equazione, e sostituendo nella seconda si ottiene

$$(2.19) \quad \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = E.$$

Questa espressione coincide formalmente con quella dell'energia totale di un punto in moto su una retta soggetto all'*energia potenziale efficace*

$$(2.20) \quad V^*(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r);$$

da qui si ricava

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\sqrt{E - V^*(\rho)}},$$

sicché la (2.19) è ridotta alle quadrature; infine, invertendo per ottenere $r(t)$ e sostituendo nella prima delle (2.18) si riduce l'intero problema alle quadrature.

Se poi si vuole ricavare direttamente l'equazione dell'orbita nella forma $r = r(\vartheta)$, basta eliminare il tempo t tra la prima delle (2.18) e la (2.19); si ottiene così

$$(2.21) \quad \frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r^2}{L} \sqrt{2\mu [E - V^*(r)]};$$

questa equazione sostituisce la (2.12).

È immediato osservare che i due procedimenti sono molto simili. Il primo dà un'equazione più elegante per l'orbita; inoltre il calcolo dell'orbita nel caso Kepleriano viene considerevolmente semplificato. Il secondo procedimento è più naturale per chi abbia familiarità con i metodi generali della meccanica. Al lettore la scelta.

2.3 Il moto centrale: studio qualitativo

Prima di passare al calcolo esplicito dell'orbita, è interessante soffermarsi sulle informazioni di carattere qualitativo che si possono dedurre dall'equazione (2.12). Si osservi anzitutto che essa, se si attribuisce a ϑ la funzione di tempo, altro non è che

da questi si devono determinare la costante L ed i valori di $w(\vartheta_0)$ e $\frac{dw}{d\vartheta}(\vartheta_0)$, diciamo w_0 e v_0 . Si trova facilmente

$$(2.14) \quad L = \mu r_0^2 \dot{\vartheta}_0, \quad w_0 = \frac{1}{r_0}, \quad v_0 = -\frac{\mu \dot{r}_0}{L};$$

qui, solo la terza formula può sollevare qualche dubbio, ma basta calcolare

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\vartheta} \dot{\vartheta} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{L}{\mu} \frac{dw}{d\vartheta}$$

(questo del resto altro non è che il calcolo già svolto per ricavare la formula di Binet). Dunque, una volta calcolato L , si dovrà risolvere la (2.12) con le condizioni iniziali

$$w(\vartheta_0) = w_0, \quad \frac{dw}{d\vartheta}(\vartheta_0) = v_0,$$

e poi la (2.13) con la condizione iniziale

$$\vartheta(t_0) = \vartheta_0.$$

2.2.3 Il caso di forze a simmetria radiale

Il caso generale più interessante in cui l'integrazione dell'equazione dell'orbita risulta possibile è quello di una forza f che dipende solo dalla distanza r . Introducendo la variabile ausiliaria $v = \frac{dw}{d\vartheta}$, la (2.12) diventa equivalente al sistema

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \frac{dw}{d\vartheta} &= v \\ \frac{dv}{d\vartheta} &= -w - \frac{\mu}{L^2 w^2} f\left(\frac{1}{w}\right); \end{aligned}$$

eliminando poi $d\vartheta$ tra queste due equazioni si trova

$$v dv = - \left[w + \frac{\mu}{L^2 w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) \right] dw.$$

Se ora si indica con $V(r)$ l'energia potenziale della forza f , ossia se è soddisfatta la relazione $f = -\frac{dV}{dr}$, si può subito integrare l'ultima equazione, e ottenere un integrale primo del sistema (2.15); si ha precisamente

$$(2.16) \quad \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} w^2 + \frac{\mu}{L^2} V\left(\frac{1}{w}\right) = C,$$

dove C è una costante di integrazione. Questa è a sua volta un'equazione a variabili separabili, che, fissati i dati iniziali ϑ_0, w_0 , dà

$$(2.17) \quad \vartheta - \vartheta_0 = \int_{w_0}^w \frac{d\eta}{\sqrt{2C - \eta^2 - \frac{2\mu}{L^2} V\left(\frac{1}{\eta}\right)}}.$$

e segue che \dot{A} è costante.

Q.E.D.

2.2.2 Equazione dell'orbita

Stabilito che il moto è piano, è conveniente scegliere il riferimento cartesiano in modo che l'asse z sia orientato come \mathbf{M} , sicchè il moto avviene nel piano x, y ; questo consente di ridurre il sistema (2.7) dal sesto al quarto ordine. È poi conveniente passare nel piano x, y a coordinate polari r, ϑ , mediante la consueta trasformazione $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$.

Se si denota con f la componente radiale della forza, la sola non nulla, il sistema (2.7) si riduce a

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \mu(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2) &= f \\ \frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\vartheta}) &= 0 . \end{aligned}$$

A questo sistema si arriva facilmente usando le espressioni (1.41) dell'accelerazione in coordinate polari. Si ricordi che f dipenderà, in generale, da r e ϑ .

La seconda delle (2.10) è ormai ben nota, perchè esprime ancora la conservazione del momento angolare: basta verificare che $\mu r^2 \dot{\vartheta}$ altro non è che la componente del momento angolare lungo l'asse z , ossia la sola componente che non si annulli. Denotando con L tale componente, si avrà dunque l'integrale primo del sistema (2.10)

$$(2.11) \quad \mu r^2 \dot{\vartheta} = L .$$

Tornando ora al sistema (2.10), il metodo tradizionale consiste nell'introdurre una variabile ausiliaria $w = 1/r$, e nel ricavare un sistema di due equazioni; la prima di esse, ove risolta, fornisce l'orbita nella forma $w = w(\vartheta)$, mentre la seconda dà il movimento nella forma $\vartheta = \vartheta(t)$. Precisamente, si ha la

Proposizione 2.3: *Posto $w = 1/r$, il sistema (2.10) è equivalente al sistema*

$$(2.12) \quad \frac{d^2 w}{d\vartheta^2} + w = -\frac{\mu f}{L^2 w^2}$$

$$(2.13) \quad \dot{\vartheta} = \frac{L}{\mu} w^2 .$$

Dimostrazione. La seconda equazione si ottiene in modo evidente, quindi basta ricavare la prima. A tal fine, si ricerchi l'equazione dell'orbita nella forma $r = r(\vartheta)$; allora l'accelerazione può scriversi mediante la formula di Binet (1.43), e questa suggerisce di introdurre la variabile $w = 1/r$; per ricavare la (2.12) occorre solo sostituire la costante C che compare nella formula di Binet con $L/(2\mu)$, come si vede confrontando la (2.11) con l'espressione (1.42) della velocità areolare. *Q.E.D.*

Se si riesce a integrare la (2.12), si può sostituire l'espressione $w(\vartheta)$ così ottenuta nella (2.13); si ottiene così un'equazione a variabili separabili, in linea di principio integrabile. Il vero problema resta dunque l'integrazione dell'equazione dell'orbita.

Per concludere, è utile fare un breve cenno al problema delle condizioni iniziali. Si supponga di aver assegnato i dati $r_0, \dot{r}_0, \vartheta_0$ e $\dot{\vartheta}_0$ corrispondenti all'istante iniziale t_0 ;

2.2 Il problema del moto centrale: risultati generali

Le conclusioni del paragrafo 2.1 riconducono lo studio del problema dei due corpi a quello ben noto del moto centrale: *un punto materiale P si muove nello spazio sotto l'azione di una forza che è sempre diretta come la congiungente il punto P con un centro fisso O .*^[1] La sola differenza rilevante è che la massa del punto P deve essere sostituita con la massa ridotta del sistema dei due corpi.

2.2.1 Conservazione del momento angolare, o legge delle aree

Se si prende il centro O come origine di un riferimento cartesiano si ha l'equazione

$$(2.7) \quad \mu \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

con una forza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ diretta come \mathbf{x} , ossia soddisfacente la condizione

$$(2.8) \quad \mathbf{x} \wedge \mathbf{F} = 0 .$$

Vale la seguente proposizione, detta anche *legge delle aree*.

Proposizione 2.1: *Sotto l'ipotesi (2.8) che il campo di forze sia di tipo centrale, l'equazione di Newton (2.7) ammette l'integrale primo*

$$\mathbf{M} = \mathbf{x} \wedge \mu \dot{\mathbf{x}} .$$

Dimostrazione. Basta derivare rispetto al tempo:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{x} \wedge \mu \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{F} ,$$

e quest'ultima espressione si annulla perché \mathbf{F} e \mathbf{x} sono paralleli. Q.E.D.

Corollario 2.2: *L'orbita di un pianeta in un campo di forze centrali è piana, e obbedisce alla seconda legge di Keplero (la velocità areolare rispetto al centro O è costante).*

Dimostrazione. Che l'orbita sia piana segue dalla costanza della direzione del momento angolare: per definizione di prodotto vettore, \mathbf{x} e $\dot{\mathbf{x}}$ giacciono ad ogni istante t nel piano passante per O e perpendicolare al vettore costante \mathbf{M} ; se $\mathbf{M} = 0$, si verifica subito che il moto è rettilineo, e quindi a maggior ragione piano. La costanza della velocità areolare segue dal fatto che il modulo $|\mathbf{M}|$ è costante: per definizione di prodotto vettore, il modulo $|\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}} dt|$ è l'area del parallelogramma di lati \mathbf{x} e $\dot{\mathbf{x}} dt$; questa a sua volta è il doppio dell'area $d\mathcal{A}$ descritta dal vettore \mathbf{x} nel tempo dt . Si ha dunque

$$(2.9) \quad \dot{\mathcal{A}} = \frac{|\mathbf{M}|}{2\mu} ,$$

^[1] Si noti che non è richiesto che \mathbf{F} dipenda solo dalla distanza $r = |\mathbf{x}|$; questa ipotesi verrà usata più avanti. Una tale generalizzazione può apparire innaturale, ma ha almeno due buone giustificazioni. La prima giustificazione è che l'introduzione di una dipendenza della forza dall'orientamento diventa inevitabile quando si considerano corpi estesi e non dotati di simmetria sferica, sicché il considerare il problema generale non è frutto di pura curiosità intellettuale. Resta in ogni caso interessante, ed è questa la seconda giustificazione, indagare quanto generali siano le leggi di Keplero, e quindi quali siano le minime ipotesi richieste per assicurarne la validità.

nella forma

$$(2.2) \quad \mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{r}$$

dove $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ è la distanza tra i due punti e $f(r)$ è l'intensità, negativa in caso di forza attrattiva e positiva in caso di forza repulsiva. Questa forma tiene conto di tutte le ipotesi sulle forze specificate nell'enunciato del problema.

È ben noto che (sotto modiche condizioni di regolarità della funzione $f(r)$, certamente soddisfatte nel caso Kepleriano) la forza (2.2) ammette potenziale, sicchè si potrà scrivere $\mathbf{F} = -\text{grad } V$, o, in modo equivalente, $f = -\frac{dV}{dr}$, dove $V = V(r)$ è una funzione della distanza.

È conveniente introdurre una trasformazione di coordinate

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \end{aligned}$$

dove \mathbf{X} è il *baricentro* del sistema, e \mathbf{r} la posizione della massa m_2 rispetto ad m_1 . Si ottengono così le equazioni

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}} &= 0 \\ \mu \ddot{\mathbf{r}} &= -\text{grad } V, \end{aligned}$$

dove μ è la *massa ridotta*, definita come

$$(2.5) \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Si conclude immediatamente che:

- i. *il baricentro dei due corpi si muove di moto rettilineo uniforme*
- ii. *il moto della massa m_2 rispetto a m_1 è lo stesso che si avrebbe se la massa m_1 fosse fissa e agisse su m_2 con la forza derivata dall'energia potenziale $\frac{m_1 + m_2}{m_1} V(r)$.*

Si noti bene che nessuna delle due masse risulta privilegiata in questo schema: se un punto dello spazio deve essere privilegiato, questo è il baricentro \mathbf{X} . Del resto, la scelta di \mathbf{r} come coordinata può giustificarsi dicendo che si vuole descrivere direttamente il moto di uno dei due corpi così come è visto da un osservatore solidale con l'altro corpo. Se ci si vuole riferire al baricentro, basta osservare che le coordinate $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{X}$ e $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{X}$ relative al baricentro sono

$$(2.6) \quad \mathbf{r}'_1 = -\frac{\mu}{m_1} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r},$$

sicchè il movimento visto da un osservatore solidale con il baricentro è, a parte un fattore di scala, lo stesso visto da un osservatore solidale con una qualunque delle due masse.

DINAMICA DEL MOTO PLANETARIO NELL'APPROSSIMAZIONE KEPLERIANA

La discussione delle leggi di Keplero dal punto di vista della dinamica Newtoniana si svolge, in prima istanza, considerando i problemi classici dei due corpi e del moto di un punto materiale in un campo di forze centrali. La discussione di questi problemi può svolgersi in un ambito ben più vasto di quello previsto dalla legge Newtoniana di gravitazione; ne risulta una classe di modelli dinamici che presenta una varietà molto ricca ed interessante di comportamenti. Il teorema di Bertrand però pone in evidenza una caratteristica singolare del potenziale Kepleriano: tra quelli che possono considerarsi significativi perché danno origine a forze che tendono a zero con la distanza è il solo per cui tutte le orbite limitate siano chiuse.

L'estensione della dinamica al problema di n corpi non è semplice: il sistema non è più, in generale, integrabile (per essere più precisi, non è stato integrato). La ricerca delle soluzioni di questo problema si presenta quindi alquanto complessa, ed è stata lo stimolo principale allo sviluppo dei metodi perturbativi. È però possibile illustrare in modo abbastanza semplice, anche se per la verità alquanto grossolano, i motivi su cui si fonda la validità dello schema Kepleriano anche per il sistema solare completo.

2.1 Il problema dei due corpi

L'estensione più immediata del modello Kepleriano (moto di un singolo pianeta rispetto al sole) è senz'altro costituita dal problema dei due corpi: *due punti materiali di massa m_1, m_2 si muovono nello spazio sotto l'azione di forze mutue di attrazione o repulsione soddisfacenti il principio di azione e reazione, agenti lungo la retta congiungente i due punti e dipendenti dalla sola distanza.*

In un sistema di riferimento cartesiano fisso le equazioni di Newton si scrivono

$$(2.1) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) , \end{aligned}$$

dove \mathbf{F} è la forza che il punto m_2 esercita su m_1 . La forza si potrà inoltre scrivere

Infine, se si accetta il principio di azione e reazione si deve ammettere l'eguaglianza $\Gamma m = \gamma M$, sicchè la forza che si esercita fra la terra e il sole deve avere intensità GmM/r^2 , dove G è una costante universale, dipendente solo dal sistema di misura. Se allora non si vuole attribuire qualche proprietà particolare alla terra e al sole, è spontaneo ammettere, con Newton, che *tra due masse qualsiasi m_1, m_2 si esercita una forza gravitazionale attrattiva di intensità Gm_1m_2/r^2 , dove r è la distanza tra le due masse.*

Una volta accettata la teoria Newtoniana, si deve poi rovesciare il problema: le leggi di Keplero devono essere giustificate sulla base della dinamica, assumendo la legge di gravitazione. È subito evidente che il problema è estremamente complesso: non è più lecito considerare, con Keplero, un pianeta per volta, ma occorre, in linea di principio, scrivere le equazioni di moto per *tutti* i corpi presenti nel sistema solare, tenendo conto della forza gravitazionale agente tra tutte le coppie, e risolvere il sistema di equazioni che ne risulta.

In altre parole, se si considerano N corpi si ha un sistema di $3N$ equazioni differenziali del secondo ordine, in ciascuna delle quali l'espressione della forza contiene $N - 1$ termini distinti. Ad esempio, Newton avrebbe dovuto scegliere almeno $N = 8$ (sole, terra, luna e i cinque pianeti allora conosciuti); questo, naturalmente, trascurando i satelliti di Giove e le comete, assumendo che null'altro si trovi nel sistema solare, e che le stelle non abbiano alcuna influenza sul moto planetario. Inoltre, questo è vero se si ammette che i pianeti si possano considerare come punti materiali, o almeno, come Newton si preoccupò di dimostrare, se si ammette che si possano rappresentare i pianeti come sfere perfette e perfettamente rigide.

Dimostrazione della proposizione 1.6. Basta sostituire nella formula di Binet (1.43) l'espressione (1.1) dell'ellisse in coordinate polari, ed eseguire le derivate. Si ottiene così

$$a_r = -\frac{4C^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

La (1.44) si ottiene infine sostituendo il valore della velocità areolare $C = \pi ab/T$, dove b è il semiasse minore dell'ellisse, e quello del parametro $p = b^2/a$ dato dalla terza delle (1.2). Q.E.D.

1.4.2 La terza legge di Keplero e la legge di gravitazione universale

Il risultato della proposizione 1.6 è già di per sé interessante: l'accelerazione del pianeta dipende solo dalla sua distanza dal sole. Viene dunque mantenuta una simmetria rotazionale che, in un modo o nell'altro, è già presente nelle teorie pre-Newtoniane. Resta tuttavia la possibilità che la costante di proporzionalità a^3/T^2 che compare nella (1.44) dipenda dal pianeta. Ora, la terza legge di Keplero afferma precisamente che *la quantità a^3/T^2 è una costante che non dipende dal pianeta, ma solo dal sole.*

Fin qui le deduzioni rigorose dalle leggi di Keplero. Ciò che si può aggiungere è frutto della profonda intuizione di Newton, che arriva fino alla formulazione della legge di gravitazione universale.

In conseguenza della terza legge si può concepire che lo spazio intorno al sole sia sede di un campo di accelerazioni creato dal sole stesso. Se poi si accetta la legge di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ (massa \times accelerazione = forza), questa situazione corrisponde al fatto che il sole crea un campo di forze inversamente proporzionale al quadrato della distanza da esso e proporzionale alla massa del pianeta. In altre parole, su qualunque corpo celeste posto nello spazio intorno al sole agirebbe una forza diretta verso il sole di intensità $f(r) = \Gamma m/r^2$, dove m è la massa del corpo e Γ una costante che dipende solo dal sole.

È importante osservare anche che l'accelerazione del pianeta non dipende dalla sua massa. Il fatto che questa circostanza si verifichi anche per il moto dei gravi in prossimità della superficie terrestre suggerisce che tale moto sia attribuibile ad una causa analoga, ossia che anche la terra crei intorno a sé un campo di accelerazioni; si può poi ammettere che questo campo si estenda fino alla luna, e che possa anche dar ragione del moto della luna intorno alla terra.^[17]

Ammessa l'esistenza di un campo di accelerazioni intorno alla terra, è spontaneo pensare all'esistenza di un campo di forze che si estende fino al sole, ossia che la terra eserciti sul sole una forza di intensità $\gamma M/r^2$, dove M è la massa del sole e γ una costante che dipende solo dalla terra. Si noti bene che questo punto di vista conduce inevitabilmente a negare quella centralità del sole che costituisce il presupposto del modello Kepleriano.

^[17] Si ricordi, a tal proposito, che l'esistenza di satelliti intorno a Giove era già nota ai tempi di Newton, grazie alla scoperta di Galileo. Dunque, il fatto che la terra avesse un satellite non costituiva più un caso eccezionale.

$$(1.41) \quad \begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\vartheta &= r\dot{\vartheta} \\ a_r &= \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 \\ a_\vartheta &= r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} . \end{aligned}$$

Detta ora $\mathcal{A}(t)$ l'area descritta dal raggio vettore, la velocità areolare si scrive

$$(1.42) \quad \dot{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\vartheta} .$$

Proposizione 1.5: *Se un punto P si muove in un piano obbedendo alla seconda legge di Keplero rispetto ad un centro O , allora l'accelerazione è puramente radiale, e se l'orbita $r(\vartheta)$ è nota, l'accelerazione è*

$$(1.43) \quad a_r = -\frac{4C^2}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right)$$

dove $C = \dot{\mathcal{A}}$ è la velocità areolare.

La (1.43) è nota come *formula di Binet*.

Proposizione 1.6: *Se l'orbita del punto P è un'ellisse con S in un fuoco, allora l'accelerazione è inversamente proporzionale al quadrato della distanza di P da S , e si ha*

$$(1.44) \quad a_r = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \frac{1}{r^2}$$

dove T è il periodo dell'orbita.

Dimostrazione della proposizione 1.5. Per la seconda legge di Keplero si ha $r^2\dot{\vartheta}/2 = C$, ovvero, derivando rispetto al tempo, $r\dot{r}\dot{\vartheta} + r^2\ddot{\vartheta}/2 = ra_\vartheta/2 = 0$, e quindi $a_\vartheta = 0$. Questo mostra che l'accelerazione è puramente radiale. Derivando $r(\vartheta)$ rispetto al tempo si ha

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\vartheta} \dot{\vartheta} = \frac{2C}{r^2} \frac{dr}{d\vartheta} = -2C \frac{d}{d\vartheta} \frac{1}{r} ;$$

derivando ulteriormente si ha poi

$$\ddot{r} = -2C\dot{\vartheta} \frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{1}{r} = -\frac{4C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{1}{r} .$$

La (1.43) si ottiene sostituendo quest'ultima relazione nell'espressione della componente radiale dell'accelerazione, data dalla terza delle (1.41). Q.E.D.

del piano distinto da S si ha allora $\overline{SP} = r\mathbf{u}_r$, e quindi, derivando, $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\vartheta}\mathbf{u}_\vartheta$ e $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta})\mathbf{u}_\vartheta$, ossia le (1.41). In un tempo dt il vettore \overline{SP} descrive l'area $dA = \frac{1}{2}r^2 d\vartheta = \frac{1}{2}r^2 \dot{\vartheta} dt$, e da qui segue subito la (1.42).

ficie conica intorno alla normale al piano dell'eclittica, con un periodo di circa 2.6×10^4 anni; è questa la causa maggiore della *precessione degli equinozi*, già nota a Ipparco (≈ 129 a.C.). Alla precessione si sovrappone poi la *nutazione*, in conseguenza della quale il polo celeste descrive una piccola ellisse di assi $18.42''$ e $13.72''$.

- ii. Il piano dell'eclittica non è costante, ma si muove lentamente provocando un ulteriore spostamento del punto vernale, molto meno rilevante di quello dovuto alla precessione dell'asse terrestre ($\approx 0.114''$ all'anno per lo spostamento del piano dell'eclittica, contro i $\approx 50.26''$ della precessione dell'asse); a questo fenomeno si dà il nome di *precessione planetaria*.
- iii. La velocità finita di propagazione della luce richiede una correzione dipendente dalla distanza dell'oggetto osservato. Questa correzione è rilevante per i pianeti.
- iv. La rifrazione atmosferica provoca uno spostamento apparente della posizione degli astri; tale effetto è nullo allo zenith (determinato dalla verticale del luogo di osservazione) e massimo all'orizzonte, dove arriva a circa $35'$.
- v. La determinazione dell'unità di tempo, tipicamente fondata sul moto diurno degli astri, risente del rallentamento della velocità di rotazione della terra, che provoca un allungamento del giorno solare di circa 1.4×10^{-3} secondi al secolo.
- vi. L'asse di rotazione della terra si sposta, sulla sua superficie, con oscillazioni la cui ampiezza può arrivare a circa $1''$.

La rilevanza o meno di questi fenomeni ai fini dell'osservazione dei corpi celesti dipende, ovviamente, da cosa si osserva. In particolare, alcuni fenomeni, quali la precessione degli equinozi, o la non costanza degli elementi orbitali, o il rallentamento della rotazione terrestre, possono produrre effetti consistenti su intervalli di tempo sufficientemente lunghi (si pensi ad esempio al confronto delle datazioni attuali delle eclissi con le osservazioni descritte in documenti antichi).

1.4 La teoria Newtoniana

Le leggi di Keplero, così come la discussione fin qui svolta, si fondano su un'analisi puramente cinematica. L'introduzione della dinamica è dovuta a Newton (1687).

1.4.1 Dipendenza dell'accelerazione dalla distanza

Si osservi innanzitutto che le prime due leggi di Keplero, pur senza tener conto della forma ellittica dell'orbita, privilegiano comunque un piano e, in questo piano, un punto S rispetto al quale viene misurata la velocità angolare. È quindi naturale considerare sul piano dell'orbita un sistema di coordinate polari r, ϑ dove r è la distanza da S e ϑ è l'angolo misurato rispetto ad una direzione fissa arbitraria. È conveniente allora scomporre sia la velocità v che l'accelerazione a nelle componenti radiali v_r, a_r e tangenti (ortogonali al raggio) v_ϑ, a_ϑ . È noto che tali componenti sono^[16]

^[16] Le relazioni (1.41) e (1.42) si deducono come segue: detti $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$ dei versori diretti come gli assi x, y , si considerino i versori radiali $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_x \cos \vartheta + \mathbf{u}_y \sin \vartheta$ e tangente $\mathbf{u}_\vartheta = -\mathbf{u}_x \sin \vartheta + \mathbf{u}_y \cos \vartheta$. Si calcola subito $\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\vartheta} \mathbf{u}_\vartheta$ e $\dot{\mathbf{u}}_\vartheta = -\dot{\vartheta} \mathbf{u}_r$. Per un punto P