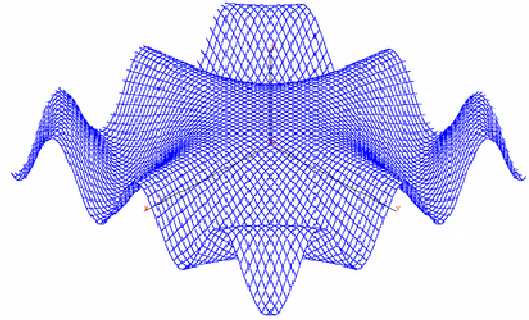

Metodi elementari nella determinazione degli errori a priori nelle misure indirette



Antonio Castellino
E-mail:
antoniocastellino@libero.it

ABSTRACT: Scopo del lavoro è sviluppare alcune forme di calcolo elementare, cioè senza fare ricorso al calcolo differenziale, in modo da permettere agli alunni, in possesso soltanto di elementi essenziali di algebra, di poter calcolare l'errore assoluto e l'errore relativo massimo a-priori in una grande varietà di casi di misure indirette. Le formule matematiche ottenute saranno talora corredate di esempi fisici di calcolo dell'errore in alcune misure indirette che effettivamente vengono eseguite in laboratorio.

PAROLE CHIAVE: Didattica della matematica, didattica della fisica.

Premessa

È noto che se $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è una funzione di n variabili che esprime una grandezza fisica indiretta, per calcolare la sensibilità della misura di y , occorre applicare conoscenze di calcolo differenziale; nel senso che se

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

è il differenziale totale della funzione f , sostituendo agli incrementi infinitesimi dx_i gli incrementi finiti Δx_i , che rappresentano gli errori assoluti delle grandezze x_i , abbiamo

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

Poiché il valore assoluto della somma non è superiore alla somma dei valori assoluti, troviamo *a priori* l'errore assoluto massimo $\varepsilon_a(y)$ della grandezza y :

$$\varepsilon_a(y) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \quad (1.1)$$

Una volta calcolato l'errore (1.1) si può trovare *a priori* l'errore relativo massimo che è

$$\frac{\varepsilon_a(y)}{y} = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \quad (1.2)$$

Scopo di questo lavoro è sviluppare alcune forme di calcolo elementare per le formule (1.1) e (1.2), cioè senza fare ricorso al calcolo differenziale, in modo da permettere agli alunni, in possesso soltanto di elementi essenziali di algebra, di poter calcolare l'errore assoluto e l'errore relativo massimo *a priori* in una grande varietà di casi di misure indirette. Le formule matematiche che noi otterremo saranno talora corredate da esempi fisici di calcolo dell'errore in alcune misure indirette che effettivamente vengono eseguite in laboratorio.

Caso della somma-differenza e del prodotto per una costante

Supponiamo di avere una grandezza $y = kx$ dove k è una costante nota con assoluta precisione. Abbiamo

$$\Delta y = k(x + \Delta x) - kx = k\Delta x$$

perciò in questo caso risulta

$$\varepsilon_a(kx) = |k\Delta x| \quad (2.1)$$

e un errore relativo

$$\varepsilon_r(kx) = \frac{\varepsilon_a(kx)}{kx} = \frac{\Delta x}{x} \quad (2.2)$$

Nel caso della somma o della differenza di due termini $y = x_1 \pm x_2$ abbiamo

$$\Delta y = x_1 + \Delta x_1 \pm (x_2 + \Delta x_2) - (x_1 \pm x_2) = \Delta x_1 \pm \Delta x_2$$

per cui

$$\varepsilon_a(x_1 \pm x_2) = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| \quad (2.3)$$

La (2.3) si estende facilmente al caso della somma algebrica di n grandezze.

Caso del prodotto.

Sia $y = x_1 x_2$, quanto vale Δy ? Abbiamo:

$$\Delta y = (x_1 + \Delta x_1)(x_2 + \Delta x_2) - x_1 x_2 = x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1 + \Delta x_1 \Delta x_2$$

E tenuto conto che: $\Delta x_1 \Delta x_2 \ll x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1$ abbiamo

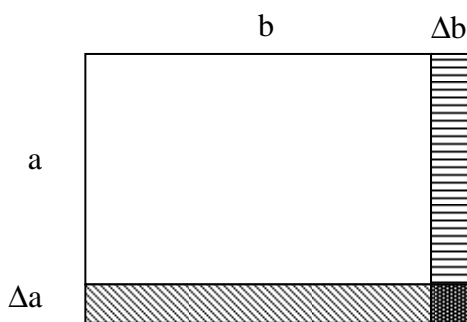
$$\Delta y = x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1 \quad (3.1)$$

perciò

$$\varepsilon_a(x_1 x_2) = |x_1 \Delta x_2| + |x_2 \Delta x_1| \quad (3.2)$$

Esempio: si voglia calcolare l'area di un rettangolo di dimensioni $a = (0,200 \pm 0,001)$ m e $b = (0,300 \pm 0,001)$ m. L'area è $S = ab = 0,06 \text{ m}^2 = 600 \text{ cm}^2$. Risulta del tutto evidente che l'errore assoluto massimo *a priori* è

$$\Delta S = a \Delta b + b \Delta a = 0,200 \text{ m} \cdot 10^{-3} \text{ m} + 0,300 \text{ m} \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 5 \text{ cm}^2$$



La somma delle aree dei rettangolini tratteggiati rappresenta l'errore assoluto massimo a priori con cui esprimiamo la misura di S . È ancora chiaro come sia del tutto trascurabile l'area del quadratino più scuro, che rappresenta $\Delta a \cdot \Delta b$. Pertanto se dobbiamo misurare l'area di un rettangolo con dimensioni di 20,0 cm e 30,0 cm misurate con la precisione del mm, otteniamo un valore

$$S = (600 \pm 5) \text{ cm}^2$$

Occupiamoci ora dell'errore relativo del prodotto di due grandezze. Dividendo la (3.2) per il prodotto $x_1 x_2$ otteniamo

$$\varepsilon_r(x_1 x_2) = \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| \quad (3.3)$$

Nel caso della misura dell'area precedente abbiamo dunque un errore relativo:

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \frac{10^{-3}}{0,2} + \frac{10^{-3}}{0,3} \cong 0,005 + 0,003 \cong 0,01 = 1\%$$

Per altro tale errore si sarebbe potuto calcolare direttamente facendo il rapporto

$$\frac{5 \text{ cm}^2}{600 \text{ cm}^2} \cong 0,01$$

Esaminiamo ora il prodotto di tre grandezze.

Posto $y = x_1 x_2 x_3$, abbiamo

$$\Delta y = \Delta[(x_1 x_2) x_3] = x_1 x_2 \Delta x_3 + x_3 \Delta(x_1 x_2) = x_1 x_2 \Delta x_3 + x_3 (x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1) = x_1 x_2 \Delta x_3 + x_1 x_3 \Delta x_2 + x_2 x_3 \Delta x_1$$

Abbiamo perciò

$$\varepsilon_a(x_1 x_2 x_3) = |\Delta x_1 (x_2 x_3)| + |\Delta x_2 (x_1 x_3)| + |\Delta x_3 (x_1 x_2)| \quad (3.4)$$

Dividendo poi la (2.7) per $x_1x_2x_3$ otteniamo l'errore relativo massimo *a priori* per il prodotto di tre fattori

$$\varepsilon_r(x_1x_2x_3) = \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| + \left| \frac{\Delta x_3}{x_3} \right| \quad (3.5)$$

Le espressioni (3.4) e (3.5) sono facilmente generalizzabili al caso del prodotto di n fattori.

Per esempio nel caso del volume di un parallelepipedo di dimensioni a, b e c abbiamo

$$V = abc$$

e quindi

$$\varepsilon_a(V) = \varepsilon_a(abc) = bc\Delta a + ac\Delta b + ab\Delta c$$

mentre l'errore relativo risulta

$$\varepsilon_r(V) = \varepsilon_r(abc) = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

Caso del quoziente

Dato $z = \frac{x_1}{x_2}$, vogliamo determinare l'errore assoluto massimo *a priori* di z. Abbiamo $x_1 = x_2z$ e quindi dalla

(3.1) abbiamo $\Delta x_1 = x_2\Delta z + z\Delta x_2$. Da questa equazione possiamo ricavare Δz e otteniamo

$$\Delta z = \frac{\Delta x_1}{x_2} - \frac{z\Delta x_2}{x_2}$$

e tenuto conto della definizione di z abbiamo

$$\Delta z = \frac{\Delta x_1}{x_2} - \frac{x_1\Delta x_2}{x_2^2}$$

abbiamo pertanto

$$\varepsilon_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \left| \frac{\Delta x_1}{x_2} \right| + \left| \frac{x_1\Delta x_2}{x_2^2} \right| \quad (4.1)$$

Abbiamo ancora una volta, dividendo la (4.1) per $\frac{x_1}{x_2}$

$$\varepsilon_r\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| \quad (4.2)$$

Per esempio, nella determinazione di una resistenza con metodo voltamperometrico, $R = \frac{V}{I}$, applicando la

(4.1) abbiamo

$$\varepsilon_a(R) = \frac{\Delta V}{I} + \frac{V\Delta I}{I^2}$$

mentre l'errore relativo sarà

$$\varepsilon_r(R) = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta I}{I}$$

Caso della potenza

Sia $y = x^2$, abbiamo $y = x \cdot x$ e pertanto, applicando la (3.1), otteniamo:

$$\Delta y = \Delta(x^2) = x\Delta x + x\Delta x = 2x\Delta x$$

Abbiamo allora

$$\varepsilon_a(x^2) = |2x\Delta x| \quad (5.1)$$

E un errore relativo

$$\varepsilon_r(x^2) = \left| 2 \frac{\Delta x}{x} \right| \quad (5.2)$$

Nel caso di un cubo avremo $y = x^3 = x(x^2)$. Perciò

$$\Delta y = \Delta(x^3) = \Delta[x(x^2)] = x^2\Delta x + x\Delta(x^2) = x^2\Delta x + x2x\Delta x = 3x^2\Delta x$$

Dove abbiamo applicato la (3.1) e la (5.1). Per cui risulta

$$\varepsilon_a(x^3) = |3x^2\Delta x| \quad (5.3)$$

e ancora

$$\varepsilon_r(x^3) = \left| 3 \frac{\Delta x}{x} \right| \quad (5.4)$$

Le formule (5.3) e (5.4) si generalizzano facilmente. È facile dimostrare in effetti che:

$$\varepsilon_a(x^n) = |nx^{n-1}\Delta x| \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_r(x^n) = \left| n \frac{\Delta x}{x} \right| \quad (5.6)$$

Per esempio, l'area di un quadrato di lato l è $S = l^2$, mentre il volume di un cubo di lato l è: $V = l^3$, pertanto in virtù di (5.5) e (5.6) risulta

$$\varepsilon_a(S) = 2l\Delta l ; \quad \varepsilon_r(S) = 2 \frac{\Delta l}{l} ; \quad \varepsilon_a(V) = 3l^2\Delta l ; \quad \varepsilon_r(V) = 3 \frac{\Delta l}{l}$$

Vediamo ancora due interessanti esempi.

Dato un cilindro di raggio r e di altezza h il suo volume è: $V = \pi r^2 h$. Vogliamo calcolare l'errore assoluto massimo a priori di V e poi il suo errore relativo massimo a priori. Tenendo conto di (2.1), (3.1) e (5.1), abbiamo

$$\Delta V = \Delta(\pi r^2 h) = \pi \Delta(r^2 h) = \pi h \Delta(r^2) + \pi r^2 \Delta h = \pi h 2r \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

Ossia

$$\varepsilon_a(V) = \pi r(2h\Delta r + r\Delta h)$$

e quindi anche

$$\varepsilon_r(V) = \frac{\varepsilon_a(V)}{V} = \frac{\pi r(2h\Delta r + r\Delta h)}{\pi r^2 h} = 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}$$

Esempio: determinazione dell'accelerazione di gravità con il metodo del pendolo semplice.

Dall'equazione del periodo del pendolo semplice per piccole oscillazioni

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Da cui si deduce

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Vogliamo determinare l'errore assoluto massimo a-priori nella determinazione di g . Per fare questo, tenendo presente la (2.1) abbiamo

$$\varepsilon_a(g) = \varepsilon_a\left(4\pi^2 \frac{l}{T^2}\right) = 4\pi^2 \varepsilon_a\left(\frac{l}{T^2}\right)$$

Per calcolare $\varepsilon_a\left(\frac{l}{T^2}\right)$ facciamo uso della (4.1): $\varepsilon_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \left|\frac{\Delta x_1}{x_2}\right| + \left|\frac{x_1 \Delta x_2}{x_2^2}\right|$ dove al posto di x_1 metteremo

l e al posto di x_2 T^2 . In tal modo otteniamo

$$\varepsilon_a\left(\frac{l}{T^2}\right) = \frac{\Delta l}{T^2} + \frac{l \Delta(T^2)}{T^4} = \frac{\Delta l}{T^2} + \frac{l 2T \Delta T}{T^4} = \frac{\Delta l}{T^2} + \frac{2l \Delta T}{T^3}$$

Perciò abbiamo

$$\varepsilon_a(g) = 4\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{T^2} + \frac{2l \Delta T}{T^3} \right)$$

Naturalmente l'errore relativo massimo a priori si ottiene dividendo: $\varepsilon_a(g)$ per $4\pi^2 \frac{l}{T^2}$ e risulta:

$$\varepsilon_r(g) = \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta T}{T}$$

Caso della radice

Terminiamo le nostre considerazioni con il caso della radice, vale a dire poniamo $z = \sqrt[n]{x}$. Dalla definizione di z otteniamo $x = z^n$ e perciò in base alla formula della potenza otteniamo $\Delta x = n z^{n-1} \Delta z$, da cui ricaviamo Δz e quindi

$$\Delta z = \frac{1}{n} \frac{\Delta x}{z^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{\Delta x}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Dove abbiamo tenuto conto della definizione di z . Abbiamo pertanto:

$$\varepsilon_a(z) = \varepsilon_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \left| \frac{1}{n} \frac{\Delta x}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} \right| \quad (6.1)$$

Si noti che la (6.1) si può anche scrivere

$$\varepsilon_a(\sqrt[n]{x}) = \left| \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \Delta x \right| \quad (6.2)$$

Trattiamo infine il caso di $y = \sqrt[n]{x^m}$. Deduciamo la regola del calcolo dell'errore di y dalla (6.2) sostituendo a z la variabile y e mettendo al posto di x , x^m . Si ha così

$$\varepsilon_a(y) = \varepsilon_a(\sqrt[n]{x^m}) = \left| \frac{1}{n} (x^m)^{\frac{1}{n}-1} \Delta(x^m) \right| = \left| \frac{1}{n} x^{\frac{m}{n}-m} m x^{m-1} \Delta x \right| = \left| \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \Delta x \right|$$

Abbiamo in definitiva

$$\varepsilon_a(\sqrt[n]{x^m}) = \left| \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \Delta x \right| = \left| \frac{m}{n \sqrt[n]{x^{n-m}}} \Delta x \right| \quad (6.3)$$

Dalle (6.2) e (6.3) si deducono poi facilmente le formule dell'errore relativo. Si ha per la precisione

$$\varepsilon_r(\sqrt[n]{x}) = \left| \frac{1}{n} \frac{\Delta x}{x} \right| \quad (6.4)$$

$$\varepsilon_a(\sqrt[n]{x^m}) = \left| \frac{m}{n} \frac{\Delta x}{x} \right| \quad (6.5)$$

Conclusioni

Altri esempi relativi a situazioni più complesse si potranno incontrare nella effettiva pratica sperimentale e lasciamo all'insegnante la cura di stabilire caso per caso, utilizzando il metodo esposto, l'errore assoluto massimo *a priori*. Ci poniamo alla fine però una domanda che non possiamo più evitare: perché un metodo "ad hoc" come quello esposto può essere importante e quale risulta la sua valenza didattica?

Il lettore attento si sarà accorto che in tale metodologia è presente l'uso implicito di alcune regole di differenziazione. Tuttavia tali regole non vengono ricavate in maniera astratta e formale come avviene in matematica, ma, al contrario, seguendo procedimenti "euristici", e tuttavia rigorosi, che consentono all'alunno di maturare e applicare gradualmente le regole di differenziazione in un contesto concreto. È dunque questa un'occasione per l'insegnante di matematica e fisica di introdurre in modo naturale, ad esempio in una terza liceo scientifico, ma anche nell'ultima parte del secondo anno del biennio dell'ITIS, concetti che saranno sviluppati nelle ultime classi. In questo modo si utilizza quel fecondissimo metodo che va sotto il nome di "matematizzazione del reale" che, se da un lato contribuisce alla comprensione della fisica, in quanto aiuta l'allievo ad acquisire la capacità di elaborare modelli della realtà e di discutere criticamente i dati sperimentali, dall'altro fa apparire la matematica un po' meno "inutile" di quanto in genere non venga considerata dagli allievi. E questo, a mio modesto avviso, è un obiettivo non trascurabile.