
La fisica che non viene al punto

Fedele Lizzi

Università di Napoli, Federico II

E-mail: fedele.lizzi@na.infn.it



ABSTRACT: Oggi la fisica abbandona il concetto di punto come lo conosciamo, quello che ci hanno essere insegnato alle scuole medie.

Questo non vuol dire che non si possa studiare la geometria di questo curioso spazio senza punti. L'idea di una geometria generalizzata risale a Von Neumann negli anni quaranta che la definì una "Pointless Geometry"... e nel corso di questi anni ha portato a una geometria noncommutativa, nella quale misurare lungo l'asse delle x e poi lungo quello delle y non è la stessa cosa che fare il viceversa.

PAROLE CHIAVE: Fisica matematica, fisica teorica, geometria.

Il punto è un ente geometrico senza dimensione. Così recitava il mio libro di geometria delle scuole medie, a distanza di quasi quaranta anni devo ancora capire il significato di questa misteriosa frase, ma questa mia incomprendimento non è stata un grave handicap per la mia successiva carriera: tutto sappiamo cosa sono i punti, senza dover “perder” tanto tempo a definirli.

Tutta la geometria è basata sui punti: per due punti passa una sola retta, il cerchio è il luogo dei punti equidistanti da un punto detto centro, e via di seguito. Possiamo generalizzare la geometria ordinaria a quella non euclidea, ma i punti mantengono inalterato il loro ruolo senza alcun problema. Anche in fisica il concetto di punto trova una immediata applicazione, anche se qui il concetto diviene un po’ più sfumato. Un *punto materiale* è sempre una astrazione fisica, un oggetto le cui dimensione, peso e possibilità di cambiare l’ambiente circostante, sono trascurabili. Certamente cosa sia un punto dipende dal contesto, per calcoli di meccanica celeste si considerano i pianeti come punti, ma si pu’o arrivare a considerare come punto materiale un intero ammasso di galassie, o un singolo elettrone.

La prima caratteristica di un punto materiale è quella di occupare una regione di spazio piccolissima rispetto al resto del sistema fisico in considerazione, operativamente paragonabile al concetto geometrico di punto. La seconda è quella di poter essere usato come “sonda”, ovvero come strumento per studiare una situazione fisica senza alterare le quantità che ci accingiamo a studiare.

Qui il concetto geometrico e quello fisico di punto si incontrano, un sistema fisico viene descritto da un punto in un appropriato spazio. La posizione del punto materiale singolo è solo il punto di partenza. Per prevedere correttamente la dinamica di un punto dobbiamo conoscere non solo la posizione ad un dato istante, e le forze che agiscono su di esso, ma anche la velocità iniziale. Si dice che dobbiamo conoscere un punto nello spazio delle fasi della particella. La generalizzazione a sistemi di particelle, a corpi rigidi o anche a quantità continue (i campi) è lo studio della meccanica analitica. Tutti questi sistemi sono descrivibili da un punto in una apposito spazio delle fasi, che altri non è che la generalizzazione dello spazio delle posizioni e delle velocità di una singola particella. In fondo la meccanica classica altro non è che lo studio delle *geometria dello spazio delle fasi*. La relatività, che pure rivoluziona tanti concetti della meccanica classica, mantiene i punti come elementi costituenti lo spaziotempo, fatto di eventi elementari e appunto puntiformi.

Ma se andiamo nell’infinitamente piccolo il concetto di punto materiale comincia a darci qualche problema. Se voglio studiare i costituenti ultimi della materia, le particelle elementari, si dovrà necessariamente far uso di altre particelle elementari. Ma si vuole studiare la particella più piccola che c’è, come si fa a studiarla con un’altra particella così piccola da non disturbarla?

Si potrebbe ipotizzare che non esista la particella più piccola, come non esiste il numero positivo più piccolo. Questa è una ipotesi molto ragionevole, ma la meccanica quantistica ci dice che esiste l’azione più piccola. L’azione è una quantità fisica con le dimensioni di una energia per un tempo, o di una lunghezza per una quantità di moto. La Meccanica Quantistica si basa sull’esistenza di un *quanto d’azione*, la celebre *costante di Planck* \hbar . Un area elementare nello spazio delle fasi di una particella ha le dimensioni di una azione elevata al cubo.

La presenza di questo quanto elementare di azione ha come conseguenza il *principio di indeterminazione di Heisenberg*. Immaginiamo di voler “vedere” dove si trova una particella. Quello che possiamo fare è illuminare la particella, ovvero mandare della luce su di essa, e dalla presenza di luce riflessa dalla particella possiamo inferire la sua posizione. La luce è fatta di onde, per cui ogni raggio ha una sua dimensione caratteristica, data dalla lunghezza

d'onda. Come non esiste il numero più piccolo non esiste la luce con lunghezza d'onda più piccola. Per avere lunghezze d'onda piccolissime dovremo uscire dal visibile e usare raggi X o raggi γ , ma si tratta sempre di luce. Ma la relatività impone ai singoli raggi di luce (i fotoni) di avere una energia che è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda. Più piccolo è il fotone, più questo avrà energia. Ma se vogliamo vedere una particella piccolissima con precisione altissima dovremo usare un fotone piccolissimo, con tanta energia, che ci dirà con precisione la posizione della particella, ma non potrà non disturbare quest'ultima, dandole una sberla che le darà una gran velocità! In poche parole, se vogliamo misurare la posizione con una grande accuratezza, dobbiamo per forza rinunciare a una precisa informazione sulla velocità.

Ma allora che fine ha fatto lo spazio delle fasi? Ricordiamo nel caso più semplice i suoi punti classicamente sono le possibili scelte di posizione e velocità della particella. a ora questi non sono raggiungibili nemmeno idealmente, come concetto astratto. In meccanica quantistica lo spazio delle fasi non è più un insieme di punti. Lo stato di un insieme fisico viene descritto come una densità di probabilità, un campo. Questo si può vedere come una conseguenza della presenza di \hbar . Questa costante è molto piccola, 10^{-27} erg/sec (ovvero un numero con ventisette zeri davanti alla prima cifra significativa) per cui possiamo ignorarla nella vita di tutti i giorni.

Il formalismo della meccanica quantistica è stato sviluppato per tener conto dall'assenza dei punti dello spazio delle fasi. I concetti fondamentali sono gli osservabili, come posizione e velocità. Questi sono oggetti algebrici che hanno un significato fisico (probabilistico) in quanto possiamo associare ad essi delle operazioni fisiche che ci danno dei numeri interpretabili come risultati di una misura. Non ha senso chiedersi quale sia lo stato di una particella ad un dato istante come una collezione di numeri che ne descrivono completamente la posizione e la velocità. Una misura della prima disturba la seconda e viceversa, tecnicamente si dice che *posizione e momento non commutano*. Se misuriamo prima la posizione, la sberla data dal fotone influenzerà la misura della velocità, e se misuriamo prima la velocità, questa misura delocalizza la particella, rendendo imprecisa la sua posizione. I punti dello spazio delle fasi non esistono più.

Ma se siamo disposti a rinunciare ad ogni informazione sulla probabilità possiamo comunque continuare a pensare alle posizioni come punti. Il problema è che c'è una seconda costante fondamentale che possiamo ottenere mettendo assieme meccanica quantistica, legge di gravitazione e relatività, la *lunghezza di Planck*

$\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$ di circa 10^{-33} cm. Ritorniamo alla nostra misura di posizione ignorando la velocità. Possiamo pensare a concentrare sempre più energia in fotoni sempre più energetici per misurare lunghezze sempre più piccole. Ma se ci avviciniamo alla lunghezza di Planck dovremo tener in conto gli effetti della gravità, uniti a quelli della meccanica quantistica. E questa ci dice che se concentriamo troppa energia (che è equivalente alla materia) in uno spazio troppo ristretto immediatamente formiamo un buco nero, ovvero un volume dello spazio dove la forza gravitazionale è così forte che nemmeno la luce può uscirvi. Per giunta non siamo neanche in grado di conciliare la meccanica quantistica con la relatività generale. Ora dobbiamo abbandonare non solo la geometria dello spazio delle fasi, ma anche il concetto di punto per la geometria dello spazio come lo conosciamo, quello che ci hanno essere insegnato alle scuole medie.

Questo non vuol dire che non si possa studiare la geometria di questo curioso spazio senza punti. I campi definiti sullo spazio tempo possono essere i nostri strumenti di misura, ma dovremo radicalmente alterare i nostri concetti. Come per la meccanica quantistica dovremo abituarci all'idea che una misura lungo l'asse delle x

seguita da una lunga y e non da lo stesso risultato se le misure vengono effettuate nell'ordine inverso. Ma tutti i concetti della geometria dovranno essere riscritti per tener conto della assenza dei punti. Questo è il programma della *Geometria Noncommutativa*. L'idea di una geometria generalizzata risale a Von Neumann negli anni quaranta che la definì una "Pointless Geometry", ma il contributo principale lo ha dato Connes negli anni ottanta, che ha avuto anche il merito di proporre il suo utilizzo nella fisica delle particelle elementari. Alla fine degli anni novanta il programma ha avuto poi un fortissimo impulso con un articolo di Seiberg e Witten che riproponevano molte connessioni fra la geometria noncommutativa e la teoria delle stringhe.

Ora lo sforzo della comunità di fisici che si occupano di geometria noncommutativa, oltre che alla meccanica quantistica, si rivolge soprattutto allo studio delle teorie di campo su spazi noncommutativi, allo studio delle simmetrie di questi spazi (spesso delle deformazioni delle usuali simmetrie) ed allo studio della gravità noncommutativa.