

# “Fare matematica” con le opere di M.C.Escher

Paola Vighi

Dipartimento di Matematica, Università di Parma

## 1. Introduzione

Le opere dell'artista grafico Maurits Cornelis Escher (1898-1972), che sono spesso riprodotte su libri, calendari, carte da gioco, puzzle, cd-rom, siti internet,... sono state e sono tuttora oggetto di studi teorico-tecnici e di pubblicazioni su riviste di divulgazione scientifica. In queste ultime solitamente si evidenziano gli aspetti matematici di alcuni disegni, facendo riferimenti alla biografia dell'artista, al fatto che Escher, pur non avendo una preparazione scientifica di base, abbia utilizzato, oltre a fantasia e creatività, concetti matematici allo scopo di realizzare e concretizzare le sue idee.

Per l'insegnante di matematica tali lavori possono costituire un buon punto di partenza per “fare matematica” in classe, nel senso che si possono utilizzare per introdurre oppure per ritrovare concetti matematici. Questo tipo di approccio, che parte dal concreto, risulta motivante e coinvolgente per gli studenti; esso consente di accostare la matematica all'espressione artistica e, più in generale, fa comprendere come la matematica possa avere delle applicazioni e come il pensiero matematico si possa sviluppare a partire da problemi concreti. Forse riesce a comunicare che la matematica ha anche un aspetto contemplativo, che si possono provare emozioni e piacere (e non solo paura!) anche affrontando attività matematiche.

Può essere opportuno, dopo aver presentato Escher anche mediante una breve biografia, leggere come egli stesso commentasse il suo incontro con la matematica: “(...) vidi un alto muro e poiché avevo il presentimento di trovare qualcosa di enigmatico e di sconosciuto, lo scavalcai faticosamente. Dall'altra parte c'era un deserto (...) fino a quando, seguendo un complicato percorso, mi trovai su una soglia: davanti a me si spalancavano le porte della matematica. Da qui si dipartivano in diverse direzioni molti sentieri ben tracciati (...) Talvolta mi pare di aver perlustrato l'intera zona, di averne percorso ogni sentiero e di averne ammirato ogni veduta; poi, improvvisamente, scopro un sentiero ancora inesplorato e assaporo nuove delizie” (Schattschneider, 1992, p. 21).

## 2. Quale matematica?

La matematica a cui si riferisce l'artista è in particolare “la divisione regolare del piano” della quale egli si occupò dopo aver visitato l'Alhambra di Granada, in cui poté ammirare e successivamente studiare le

maioliche, tipica espressione dell'arte islamica. La produzione di pavimentazioni o di disegni di motivi ripetuti caratterizza spesso le culture: se ne possono trovare esempi quasi presso ogni civiltà. L'originalità di Escher

sta nella scelta di ricoprire il piano con figure inusuali, soprattutto con animali. A partire da una griglia triangolare, quadrangolare, esagonale ecc. egli pensò di modificare il contorno del poligono-base in modo da ricavarne figure di esseri viventi, cosa che non era concessa dal Corano agli artisti islamici. Sviluppando quest'idea realizzò numerosi lavori, alcuni molto noti, altri meno; essi costituiscono una ricca fonte per un insegnante che scelga di utilizzarli per "fare matematica".

Ma quale matematica? Innanzitutto e soprattutto la geometria, che può essere sviluppata nei seguenti aspetti: tassellazioni, trasformazioni geometriche, aree, geometrie non euclidee, la geometria dello spazio.

Significativa è la litografia *Rettili* (fig. 1): tra i numerosi oggetti che compaiono in essa si nota un foglio sul quale, dopo averlo tassellato con esagoni, sono stati disegnati dei rettili che a un certo punto "prendono vita" e cominciano a salire. Leggiamo la descrizione che ne fa l'autore: "Uno di questi animali [...] allunga una zampa al di là del bordo del quaderno e si distacca per entrare nella vita reale. Si arrampica [...] per procedere, con fatica, su una salita scivolosa di una squadra da disegno, fino all'apice della sua esistenza. Dopo un breve riposo [...] torna verso il basso sulla superficie piatta della carta da disegno, dove, ubbidiente, si inserisce fra i suoi vecchi compagni e riprende la sua funzione di elemento della divisione del piano" (Escher, 1990, pp. 10-11).



**Figura 1.** M. C. Escher, *Rettili*

Si ritrovano qui alcuni motivi fondamentali della produzione artistica di Escher: le tassellazioni, il passaggio dal piano allo spazio, i solidi geometrici.

### **3. Divisione periodica del piano e trasformazioni geometriche**

Dopo aver presentato la litografia *Rettili*, si può passare a una situazione più semplice come quella illustrata nel disegno preparatorio (fig. 2).



**Figura 2.** Disegno preparatorio a M. C. Escher, *Rettili*

Si possono fare inizialmente osservazioni generali: il ricoprimento è ottenuto mediante figure direttamente congruenti, di tre colori diversi (rosa, verde e bianco) per poterle distinguere. Ci si può chiedere come mai questi rettili ricoprono perfettamente il piano. Per rispondere basta analizzare uno degli esagoni con i quali è stato tassellato inizialmente il foglio (tali esagoni sono ben visibili nel disegno preparatorio riprodotto in *Il mondo di Escher*, p. 119) e il rettile in esso contenuto: si può verificare che le parti dell'animale esterne all'esagono sono riprodotte con altro colore all'interno; in altre parole, si può vedere come Escher abbia ottenuto il rettile a partire da un esagono dal quale "ha tolto alcuni pezzi" per "attaccarli poi esternamente ad esso" (dunque la superficie della porzione di piano occupata da un rettile deve essere uguale a quella dell'esagono-base!). Se si conoscono le trasformazioni geometriche si può analizzare meglio la tecnica utilizzata; consideriamo, per esempio, un rettile bianco e l'esagono che "lo racchiude": la zampa posteriore sinistra esce dall'esagono. Appoggiamo un lucido trasparente sul foglio e ricopriamola. Facciamo poi ruotare il lucido in senso orario di  $120^\circ$ : osserviamo che il nostro disegno si sovrappone alla zampa posteriore sinistra di un rettile rosa. Considerazioni analoghe si possono fare per gli altri pezzi esterni all'esagono come una parte del capo del rettile e una parte della zampa posteriore destra. Gli altri tre pezzi, cioè una parte della coda e parti delle zampe anteriori sono state ottenute mediante la tecnica del "copia e incolla" ovvero applicando rotazioni e traslazioni.

Un'altra possibilità è quella di fare una lettura in termini di trasformazioni geometriche: una volta individuato l'elemento-base (un rettile) se ne possono scegliere tre di colori diversi e che abbiano un punto in comune (per esempio, quello comune a tre teste) e si possono studiare le trasformazioni degli uni negli altri. Si ritrova così il gruppo delle rotazioni che mutano un triangolo equilatero in sé, che si può poi vedere come un sottogruppo di quello delle isometrie di un triangolo. In questo modo si affrontano o si ritrovano concetti di geometria delle trasformazioni, ma anche di algebra astratta. Inoltre si può scegliere di lavorare, per esempio, solo con i rettili bianchi e sviluppare il tema delle traslazioni e loro composizione. Si possono anche far applicare o scoprire teoremi di geometria delle trasformazioni mediante esercizi impostati così: si scelgono due

animali (che d'ora in poi chiameremo figure, essendo insiemi di punti del piano effettivamente lo sono!) e si chiede di individuare mediante quale tipo di trasformazione si possa passare dall'uno all'altro. In altre parole, scelte per esempio due figure corrispondenti attraverso la composizione di una rotazione e una traslazione, si può chiedere di individuare di che tipo è la trasformazione composta e, una volta stabilito che si tratta di una rotazione, si può chiedere di individuarne centro e ampiezza. La dimostrazione del relativo teorema può risultare indispensabile per comprendere che l'ampiezza è quella della rotazione iniziale e come costruire il centro.

Le attività descritte sinora sono forse più adatte per la scuola dell'obbligo; possono essere proposte anche nel biennio, ma ovviamente con tempi diversi, per poi passare a un'analisi in termini di *pattern design*. In altre parole, dopo aver spiegato che a ogni configurazione decorativa soggiace un reticolo, si può impostare un'analisi che conduca a individuarne i vettori di base: in questo modo si scopre che la maglia è un rombo di lato  $p$ , con un angolo di  $60^\circ$  all'interno del quale si notano un centro di simmetria nel punto di incontro delle diagonali e due centri di rotazione di ordine 3. Si può illustrare la classificazione di Polyà dei 17 gruppi di trasformazione del piano (ben descritta da Gilardi in I "*pattern design*" e i loro gruppi) e vedere in quale di questi rientri il caso esaminato. Infine è possibile individuare nel piano cartesiano le equazioni delle isometrie generatrici del gruppo di trasformazioni.

#### 4. Note didattiche

Se proponessimo ai nostri allievi, magari in collaborazione con gli insegnanti di educazione artistica o tecnica, non solo di esaminare, ma anche di costruire disegni analoghi a quelli di Escher, (con risultati probabilmente più semplici e meno "d'effetto"), essi imparerebbero a leggerli in un'ottica diversa, che non si limita all'osservazione, ma che analizza la costruzione eseguita. Questo li avvicinerebbe alla *geometria delle trasformazioni*, tema che compare nei programmi di ogni ordine scolastico, ma che purtroppo non è ancora entrato a far parte dell'ordinaria attività in classe nel senso che, anche se lo si tratta, nella pratica didattica non gli si attribuisce una giusta rilevanza: spesso nella scuola elementare ci si limita a trattare le simmetrie assiali, mediante attività di piegatura di fogli o le traslazioni, mediante ripetizione (quasi sempre in orizzontale) di motivi. Nella scuola media, nonostante i programmi dedichino un intero tema a tale argomento, la geometria tradizionale ha il sopravvento e, di conseguenza, le trasformazioni vengono trattate in modo episodico, spesso senza tenere conto del loro carattere interdisciplinare; infine nella scuola superiore si lavora quasi esclusivamente nel piano cartesiano, direttamente con le equazioni di particolari trasformazioni.

Come introdurre in classe le trasformazioni geometriche? Lo si può fare proprio a partire da lavori di Escher. Gli esempi fatti forniscono spunti per possibili modalità di introduzione in classe. Ho personalmente condotto una ricerca in tal senso, rivolta a studenti di scuola media inferiore e del biennio di scuola secondaria superiore. Allo scopo di avviare una sperimentazione in un Istituto d'Arte, la necessità di ricorrere a un argomento che non fosse troppo lontano dall'esperienza degli studenti mi ha condotto alla scelta dei disegni dell'artista olandese e, di conseguenza, all'individuazione dell'argomento *trasformazioni geometriche* (si vedano i lavori di Baistrocchi, Speranza e Vighi, *Dalle opere di Escher alle trasformazioni geometriche: un itinerario didattico per il biennio delle scuole superiori*, e Vighi, *Dalle opere di M.C. Escher alle*

*trasformazioni geometriche* citati in bibliografia). Si tratta infatti di concetti che presentano il vantaggio di non richiedere particolari prerequisiti, per cui possono essere affrontati anche da allievi che, come si suol dire, non hanno un buon rapporto con la matematica; in altre parole, l'attività può coinvolgere attivamente l'intera classe. La presentazione di disegni all'inizio piuttosto semplici e poi via via più complessi, oltre che essere stimolante e fornire motivazione al lavoro, fa comprendere l'importanza dello strumento matematico in un contesto non matematico, fa cogliere il rapporto complessità-bellezza: è solo un piccolo, ma importante passo verso quello che viene chiamato l'aspetto contemplativo della matematica!

## 5. L'infinito

Inizialmente Escher si dedicò al ricoprimento del piano del foglio con motivi ripetuti, spesso identici a parte il colore. A proposito di un suo disegno di questo tipo, *Studio di divisione regolare del piano con rettili*, l'autore commenta così: "Che cosa è stato realizzato con l'ordinata suddivisione della superficie (...)? Non ancora il vero infinito, ma comunque un frammento di esso, un pezzo dell'universo dei rettili. Se la superficie in cui essi si inseriscono fosse infinitamente grande, un numero infinito di essi potrebbe esservi rappresentato" (Locker, 1978, pp. 38-39). In questa frase si legge il desiderio dell'artista di rappresentare "l'infinito"; questa sua esigenza è andata via via crescendo e l'ha condotto in effetti a una produzione in questo senso.

Si tratta delle opere in cui le figure rappresentate sono ottenute mediante progressivi rimpicciolimenti. Significativa in questo senso è *Sempre più piccolo* (fig. 3), una xilografia in cui sono sempre rappresentati dei rettili, che però diventano sempre più piccoli a mano a mano che ci si sposta dall'esterno verso il centro. Escher la commenta così: "(...) la bisezione delle figure è stata portata all'assurdo. L'animale più piccolo avente ancora una testa, una coda e quattro zampe, è lungo circa 2 mm. Dal punto di vista della composizione questo lavoro è solo in parte soddisfacente" (Escher, 1990, p.9).

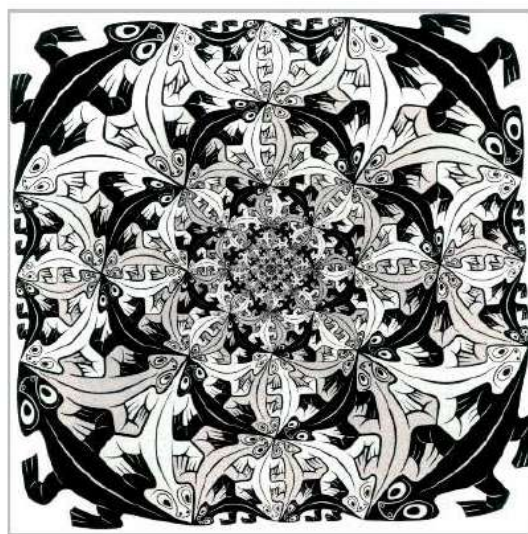


Figura 3. M. C. Escher, *Sempre più piccolo*

Quella che l'autore chiama "bisezione" è un dimezzamento delle lunghezze: lo si può verificare scegliendo un animale nella parte più esterna e, dopo aver individuato quelli "con la stessa forma" che lo "seguono" spostandosi verso il centro, misurando le distanze testa-coda si può prendere spunto da qui per parlare di similitudine e, riprendendo l'argomento area, interrogarsi sul rapporto tra aree di figure simili.

L'insoddisfazione di Escher per i suoi tentativi di rappresentazione dell'infinito trovò risposta quando egli incontrò il matematico Harold Scott Macdonald Coxeter, che gli fece conoscere il cosiddetto *modello di Poincaré del piano iperbolico*, basato sulla negazione del V postulato di Euclide. In esso l'artista trovò lo strumento per realizzare ciò che da tempo desiderava. Fece diversi tentativi in questo senso, il primo e più rudimentale è *Cerchio limite I*, a cui seguirono, con migliori risultati, le xilografie *Cerchio limite II, III e IV*. In esse l'artista vide realizzata la rappresentazione dell'infinito, che commentò così: "(...) il limite dell'infinitamente numeroso e dell'infinitamente piccolo viene raggiunto sul bordo circolare" (Locker, 1978, p.39).

Osserviamo come le incisioni *Cerchio limite* si possano considerare tassellazioni nel piano di Poincaré, nel senso che le repliche di una stessa figura sono isometriche in quanto figure del piano non euclideo.

Dal punto di vista didattico ricordiamo che le geometrie non euclidee da un punto di vista elementare compaiono tra i contenuti delle proposte della Commissione Brocca per i trienni di scuola secondaria superiore in cui, nei commenti al tema geometria, l'introduzione delle geometrie non euclidee viene motivata dall'importanza di "chiarire il significato di (...) sistema ipotetico-deduttivo"; viene citata anche "la costruzione di idonei modelli rappresentativi", magari preceduta "dalla illustrazione dei più significativi tentativi di dimostrazione del V postulato di Euclide". In questi ultimi anni, in diverse scuole sono state svolte delle sperimentazioni in questo senso. Un punto di partenza potrebbe essere una delle xilografie di Escher, per esempio *Cerchio limite I* (fig. 4).



Figura 4. M. C. Escher, *Cerchio limite I*

## 6. Conclusioni

Gli esempi fatti non sono certamente esaurienti, ma spero possano almeno dare un'idea di come si possa "parlare di matematica" anche a partire da un disegno. Una possibile obiezione è la seguente: "Quanto proposto può essere allettante e stimolante per l'allievo, ma nei programmi scolastici ci sono temi più importanti". In realtà, un lavoro di questo tipo presenta anche notevoli aspetti positivi: consente di coinvolgere tutti gli alunni e dà loro modo di esprimere le proprie abilità percettive, manuali, logiche. Si può iniziare presentando inizialmente in classe xilografie più semplici di quelle qui riprodotte, per poi passare a quelle più complesse; in questo modo gli allievi possono scoprire l'importanza degli strumenti matematici per decodificare e comprendere, apprezzando la possibilità di accostare la razionalità della matematica all'arte che, di solito, viene considerata lontana dalle discipline scientifiche.

### BIBLIOGRAFIA

Il lettore può trovare riproduzioni delle opere di Escher soprattutto in 7, 8, 12, 14. Indicazioni di carattere didattico si trovano in 2, 10, 15.

1 . Michele Emmer (a cura di), L'occhio di Horus. *Itinerari nell'immaginario matematico*, Istituto Enciclopedia Italiana, TreccaniCataloghi/5, Roma 1989

2. Monica Baistrocchi, Francesco Speranza e Paola Vighi, *Dalle opere di Escher alle trasformazioni geometriche: un itinerario didattico per il biennio delle scuole superiori*, Quaderno del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, A.A. 1991/92, Parma 1992

3. Harold Scott Macdonald Coxeter, *Introduction to Geometry*, J. Wiley & Sons, New York 1969

4. Michele Emmer, *L'infinito & l'impossibile*, "Scienza 85" (ed. it. di "Science 85"), pp. 45-53

5. Michele Emmer (a cura di), *The Visual Mind: Art and Mathematics*, Massachusetts Institute of Technology, Boston 1993

6. Bruno Ernst, *Lo specchio magico* di M. C. Escher, Berlin, Benedikt Taschen Verlag, Berlin 1990

7. Maurits Cornelis Escher, (1971), *The graphic work of M. C. Escher*, BallantineBooks, New York 1971

8. Maurits Cornelis Escher, *Grafica e disegni*, Benedikt Taschen Verlag, Berlin 1990

9. Mario Gilardi, *I "pattern design" e i loro gruppi*, "Periodico di matematiche", n. 2- 3, Mathesis, Roma 1987, pp.57-65

10. Fernando Hernández Rojo, *L'influenza dell'Alhambra nell'opera di Escher*, "Bollettino dei Docenti di Matematica", n. 36, Repubblica e Cantone del Ticino 1998, pp. 35-52

11. Piergiorgio Odifreddi, *M.C.: Escher: arte del puzzle o puzzle dell'arte*, Le Scienze, n. 340, Milano 1996

12. J. L. Locker (a cura di), *Il mondo di Escher*, Garzanti, Milano 1978

13. Doris Schattschneider e Wallace Walker, *M.C. Escher: Caleidocicli*, Benedikt Taschen Verlag, Berlin 1990

14. Doris Schattschneider, *Visioni della simmetria*, Zanichelli, Bologna 1992

15. Paola Vighi, *Dalle opere di M.C. Escher alle trasformazioni geometriche*, "La Didattica", n.1, anno III, Laterza, Bari 1996, pp. 75-85

16. Paola Vighi, *La matematica nelle opere di M. C. Escher*, in “Arte e matematica: un sorprendente binomio”, Atti Convegno Nazionale Mathesis, Vasto (Ch) 14-16 marzo 1997, pp. 289-295

17. Paola Vighi, *Matematica e...Arte*, "L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate", vol. 21 A-B, n.6, Paderno del Grappa (TV) 1998, pp. 565-583.