

## La fisica per il test di Medicina 2009

### Edoardo Milotti

Il testo presentato dal MIUR non è né chiaro né univoco e prima di tentare di produrre una soluzione è opportuno definire bene le condizioni del problema. Da quanto affermato nel testo e nei successivi “chiarimenti” del Ministero, sembra di capire che non sia possibile prendere in mano le due sfere (altrimenti la differenza di densità sarebbe ovvia), e che quindi ci sia un meccanismo indipendente di sgancio che fa cadere entrambe le sfere allo stesso tempo. Inoltre i “chiarimenti” indicano che la caduta avviene in aria (se le sfere cadessero nel vuoto impiegherebbero esattamente lo stesso tempo per raggiungere il suolo). Questo significa che dobbiamo prendere la seguente equazione del moto per ciascuna sfera

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$$

L'equazione del moto è scritta in forma scalare (e non vettoriale) perché il moto avviene lungo una sola direzione (la direzione positiva è verso il basso), e ci dice che la forza (= massa x accelerazione) è data dalla somma di forza peso + la forza di attrito, che qui assumiamo essere proporzionale alla velocità (questa è un'ipotesi che si fa frequentemente in problemi di questo tipo, anche se non è l'unica possibile).

Si noti che se assumiamo la validità della formula di Stokes-Einstein per il moto di oggetti sferici in fluidi viscosi (nel caso irrotazionale) troviamo per entrambe le sfere lo stesso coefficiente di attrito

$$\gamma = 6\pi\eta r$$

dove  $\eta$  è la viscosità dell'aria.

Per risolvere il problema assumiamo la seguente condizione iniziale:  $v(t = 0) = 0$ . Si può arrivare alla soluzione in diversi modi, forse il più semplice è quello che consiste nel risolvere prima l'equazione omogenea

$$m \frac{dv}{dt} = -\gamma v$$

che ha la soluzione (qui salto alcuni semplici e ovvi passaggi)

$$v(t) = C \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)$$

dove  $C$  è una costante di integrazione. Questo significa che la soluzione dell'equazione differenziale non omogenea è (anche qui salto alcune semplici considerazioni)

$$v(t) = C \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) + \frac{mg}{\gamma}$$

e quindi, utilizzando la condizione iniziale, si elimina la costante di integrazione, e si trova la velocità in funzione del tempo

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma} \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right)$$

il cui valore asintotico è  $v_{\infty} = \frac{mg}{\gamma}$  (ed è maggiore nel caso del piombo)

Si noti che il tempo caratteristico del transiente esponenziale è  $\tau = m/\gamma$ , e quindi il transiente dura di più nel caso della sfera di piombo rispetto alla sfera di sughero.

La differenza tra velocità della sfera di sughero e piombo è

$$v_p(t) - v_s(t) = \frac{m_p g}{\gamma} \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m_p}t\right)\right) - \frac{m_s g}{\gamma} \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m_s}t\right)\right)$$

e si vede facilmente che questa differenza è sempre positiva. Infatti

$$v_p(t) - v_s(t) = \frac{g}{\gamma} \left[ (m_p - m_s) - \left( m_p \exp\left(-\frac{\gamma}{m_p}t\right) - m_s \exp\left(-\frac{\gamma}{m_s}t\right) \right) \right]$$

e poiché  $m_p > m_s$ , allora

$$\exp\left(-\frac{\gamma}{m_p}t\right) > \exp\left(-\frac{\gamma}{m_s}t\right)$$

e a maggior ragione

$$m_p \exp\left(-\frac{\gamma}{m_p}t\right) > m_s \exp\left(-\frac{\gamma}{m_s}t\right)$$

Questo significa che vale anche la seguente disuguaglianza

$$m_p - m_s > m_p \exp\left(-\frac{\gamma}{m_p}t\right) - m_s \exp\left(-\frac{\gamma}{m_s}t\right)$$

e quindi

$$v_P(t) - v_S(t) > 0$$

In parole povere, la sfera di piombo è sempre più veloce della sfera di sughero, ed arriva prima al suolo.

A questo punto il testo ministeriale fa un'ulteriore ipotesi nascosta, che il terreno sia soffice, anelastico. Se il terreno fosse duro, e l'urto parzialmente elastico, le palline potrebbero almeno in parte rimbalzare (il piombo è malleabile, e se l'urto fosse sufficientemente veloce verrebbe deformato). Il testo presuppone anche che l'altezza da cui le sfere vengono rilasciate sia sufficientemente grande da produrre effetti rilevabili (la deformazione del terreno).

A questo punto la conclusione è che – accettando le ipotesi nascoste che si possono dedurre dai due testi ministeriali – la risposta corretta è effettivamente la B. Vale però la pena di notare che se si abbandona l'ipotesi che il moto avvenga in aria, e si suppone invece che le sfere si muovano nel vuoto, la soluzione corretta è la A. Forse il MIUR riteneva che fosse naturale immaginare il moto in aria, ma la conseguenza di questa ipotesi è che il problema diventa matematicamente troppo complesso per gli studenti, mentre l'ipotesi di moto in vuoto consente di arrivare in modo semplice alla soluzione A.

Certamente tutto ciò è estremamente insoddisfacente da un punto di vista educativo. A mio parere le osservazioni del prof. Giunta sono corrette: il quesito è stato formulato in modo estremamente impreciso. Inoltre la comprensione completa del problema (con il moto in aria) presuppone conoscenze che sono molto al di fuori delle competenze degli studenti delle scuole italiane.

Questi aspetti di incertezza e mancanza di conoscenze rendono aleatoria la risposta: io ritengo che ogni volta che si crea una situazione del genere si mandi agli studenti il messaggio sbagliato, che nella vita si debba “avere fortuna” piuttosto che abilità, conoscenza, intelligenza.

Prof. Edoardo Milotti  
Dipartimento di Fisica, Università di Trieste  
e-mail: milotti@ts.infn.it