Come si calcola la velocità con cui un corpo cade in un buco nero?

Domenico Annunziata
16 febbraio 2009

Nei buchi neri la materia si trova tutta confinata all'interno di una superficie limite, la *superficie di Schwarzschild,* dove l'attrazione gravitazionale risulta invincibile. In una situazione a simmetria sferica, il raggio di tale superficie è noto come *raggio di Schwarzschild* $r_S = 2GM/c^2$, con G costante gravitazionale di Newton, M la massa materiale che produce il campo, c la velocità della luce nel vuoto. Perfino la luce, e in generale ogni radiazione elettromagnetica che giunga a tale distanza dal centro della sfera, non riesce più a sfuggire.
In effetti, in un campo gravitazionale una particella è in caduta libera nello spaziotempo. Quando si segue, ad esempio, una particella in moto radiale verso l'interno della zona circostante il buco nero, anche dopo avere attraversato la superficie limite, essa prosegue nella sua traiettoria verso la singolarità centrale (un un punto dello spaziotempo in cui la nostra descrizione fisica perde significato), che lo spaziotempo presenta nella posizione $r = 0$.
La superficie di Schwarzschild funziona, del resto, come una membrana permeabile solo dall'esterno. Un oggetto che penetri in essa avvertirà un forte effetto mareale e un buco nero anche piccolo, dell'ordine di qualche massa solare, presenta forze mareali davvero estreme che distruggerebbero del tutto l'oggetto in questione. Dal punto di vista di chi cade dentro, il tempo impiegato a raggiungere la singolarità partendo dall'orizzonte è proporzionale alla massa del buco nero: se questa è 10 volte la massa del Sole, il tempo sarebbe di un solo decimillesimo di secondo, mentre per un buco nero supermassiccio potrebbe arrivare fino a parecchi minuti.
Dall'esterno, comunque, è effettivamente osservabile solo ciò che accade per $r>r_S$ e un osservatore distante che osservi un oggetto cadere radialmente verso il buco nero lo dovrebbe vedere rallentare fino a fermarsi, come congelato, giusto all'esterno della superficie limite, invece di vederlo cadere sempre più velocemente fino a scomparire attraverso l'orizzonte. Ciò è dovuto al modo in cui la gravità influenza lo scorrimento del tempo, il quale rallenta notevolmente nei forti campi esterni ad un buco nero, fino a fermarsi all'orizzonte. (Il fatto che poco dopo l'oggetto comunque scompaia alla vista con grande rapidità va invece attribuito allo spostamento verso il rosso della luce che ne porta l'informazione, a lunghezze d'onda così lunghe da andare ben presto aldilà dello spettro visibile, a causa di un effetto dovuto proprio al rallentamento del tempo vicino all'orizzonte.) Tuttavia, l'oggetto sente la propria velocità aumentare continuamente e raggiunge la distanza r_S in un tempo proprio finito.
Scrivendo l'equazione di conservazione dell'energia (cinetica + potenziale) per una particella in tale situazione, considerando il punto r_∞ in cui la particella è ferma all'inizio, si può ricavare l'espressione della velocità v(r) in ogni istante successivo (tenendo opportunamente conto delle questioni legate alla ridefinizione delle coordinate spaziotemporali giuste in cui vedere la caduta verticale). Si può scegliere, per semplicità, $r_\infty = \infty$ e, interessandosi solo al

comportamento di v(r) per r ≥ r_S, ossia sempre all'esterno della superficie di Schwarzschild, si può far vedere che:

$$v(r) = \sqrt{r_S}\,\frac{r - r_S}{r^{3/2}} = \sqrt{\frac{2GM}{c^2}}\,\frac{r - \frac{2GM}{c^2}}{r^{3/2}}\ .$$

Questa è una funzione di r che raggiunge un massimo $v_{max} = 2c/(3\sqrt{3})$ nel punto $r^* = 6GM/c^2 = 3r_S$. Oltre tale punto, per $r_S < r < r^*$, v(r) decresce di nuovo fino ad annullarsi per $r \rightarrow r_S$, dove la coordinata temporale va invece all'infinito.